ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 28, n. 1, 2020

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2020

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 28, n. 1, 2020

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2020

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Comitato di redazione
Direttore: Maura Iori (Italia)
Gianfranco Arrigo (Svizzera)
Miglena Asenova (Italia)
Benedetto Di Paola (Italia)
Iliada Elia (Cipro)
Olga Lucia Léon (Colombia)
Pedro Javier Rojas (Colombia)
Sergio Vastarella (Italia)

Comitato scientifico:
Direttore: Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)
Samuele Antonini (Università di Pavia, Italia)
Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)
Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)
Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)
Guy Brousseau (Université de Bordeaux, Francia)
Ricardo Cantoral (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Ubiratan D'Ambrosio (UNICAMP/Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasile)
Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)
Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)
Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)
Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)
Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)
Pedro Gómez (Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia)
Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)
Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)
Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)
Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)
Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)
Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)
Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)
Carlos Eduardo Vasco Uribe (Universidad Nacional de Colombia, Emeritus, Bogotá, Colombia)
Gérard Vergnaud (Centre National de la Recherche Scientifique, CNRS, Parigi, Francia)
Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica

The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education

Dedicato a Guy Brousseau e a Luis Radford
Dedicated to Guy Brousseau and Luis Radford

Miglena Asenova,[1,3] Bruno D'Amore,[1,4] Martha Isabel Fandiño Pinilla,[1] Maura Iori[1] e George Santi[1,2]

[1]*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia*
[2]*Libera Università di Bolzano, Bolzano, Italia*
[3]*Università di Palermo, Palermo, Italia*
[4]*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

Abstract. *The issue of comparing theories is one of the most relevant and debated research topic in mathematics education, which brings to the fore the epistemological foundations of this discipline. In this study, the authors examine and compare two of the most important theories that have characterized the development of mathematics education: the theory of objectification (TO) and the theory of didactical situations (TDS). The TDS has marked the birth of mathematics education in the modern sense, by focusing its interest on the classroom situations (the triangle of didactics, effects, clauses, didactical contract). The TO has marked the transition from a mentalist to a holistic approach to learning. Against the background of a pragmatic conception of human activity, historically and socially established, the TO takes into account not only the role of the body's sensorimotor activity that broadens the range of semiotic resources by including gestures, material artefacts, bodily movements and postures – namely the so-called semiotic means of objectification – but also the individual's emotional dimension. The authors present a thorough analysis of the foundational elements of the two theories, which are useful for an ontological and epistemological comparison. On the basis of the recent research results on the networking of theories in mathematics education and the distinction, proposed by Agazzi, between referential component and contextual component of the meaning of the terms or predicates that characterize a theory, this study shows that the two theories are partially comparable and partially compatible, and have partially similar explanatory aims; therefore it is shown that there is comparability and not contradiction, despite the different ontological and epistemological assumptions.*

Keywords: theory of objectification, theory of didactical situations, comparison between theories, comparability, explicative aim, ontology, epistemology.

Sunto. *Il problema del confronto tra teorie è uno dei temi di ricerca più rilevanti e dibattuti in didattica della matematica, che chiama in causa i fondamenti epistemologici della disciplina. In questo studio, gli autori prendono in esame, confrontandole, due delle teorie più importanti che hanno caratterizzato lo sviluppo della didattica della matematica: la teoria dell'oggettivazione (TO) e la teoria delle situazioni didattiche (TSD). La TSD ha segnato la nascita della didattica della matematica in senso moderno, focalizzando il suo interesse sulle situazioni d'aula (triangolo della didattica, effetti, clausole, contratto didattico). La TO ha segnato il passaggio da un approccio mentalista all'apprendimento della matematica a una visione olistica che, sullo sfondo di una concezione pragmatica dell'attività umana storicamente e socialmente costituita, prende in considerazione non solo il ruolo del corpo e i movimenti, nonché i diversi mezzi semiotici di oggettivazione, includendo in essi gesti e artefatti, ma anche l'idea di considerare la dimensione emotiva nei processi di apprendimento. Gli autori presentano un'approfondita analisi degli elementi fondanti delle due teorie, utili a un confronto di tipo ontologico ed epistemologico. Sulla base dei più recenti risultati di ricerca sul networking di teorie in didattica della matematica e sulla distinzione, proposta da Agazzi, tra componente referenziale e componente contestuale del significato dei termini o predicati che caratterizzano una teoria, si mostra che le due teorie sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili e che hanno finalità esplicative parzialmente simili; dunque come ci sia confrontabilità e non contraddizione, nonostante i diversi presupposti ontologici ed epistemologici.*

Parole chiave: teoria dell'oggettivazione, teoria delle situazioni didattiche, confronto tra teorie, comparabilità, finalità esplicativa, ontologia, epistemologia.

Resumen. *El problema de comparar teorías es uno de los temas de investigación de mayor relevancia y uno de los más debatidos en didáctica de la matemática; esta comparación llama en causa los fundamentos epistemológicos de la disciplina. En este estudio, los autores toman en examen, comparándolas, dos de las teorías de mayor importancia que han caracterizado el desarrollo de la didáctica de la matemática: la teoría de la objetivación (TO) y la teoría de las situaciones didácticas (TSD). La TSD designó el nacimiento de la didáctica de la matemática en sentido moderno, focalizando su interés en las situaciones de aula (triángulo de la didáctica, efectos, cláusulas, contrato didáctico). La TO designó la transición de una aproximación mentalista al aprendizaje de la matemática a una visión holística que, tomando como base una concepción pragmática de la actividad humana histórica y socialmente constituida, toma en consideración no sólo el papel del cuerpo y los movimientos, sino también los diversos medios semióticos de objetivación, incluyendo en estos medios los gestos y los artefactos, a estos también agregando la idea de considerar la dimensión emotiva en los procesos de aprendizaje. Los autores presentan un análisis detallado de los elementos fundantes de las dos teorías, útiles para una comparación de tipo ontológico y epistemológico. Tomando como base los más recientes resultados de investigación sobre el networking de teorías en didáctica de la matemática y de la distinción, propuesta por Agazzi, entre componentes* *referenciales y componentes contextuales del significado de los términos y predicados que caracterizan una teoría, se muestra que las dos teorías son parcialmente comparables y parcialmente compatibles y que tienen finalidades explicativas parcialmente símiles; por lo tanto, se puede decir que existe comparabilidad y no contradicción, no obstante los diversos presupuestos ontológicos y epistemológicos.*

Palabras clave: teoría de la objetivación, teoría de las situaciones didácticas, comparación entre teorías, comparabilidad, finalidad explicativa, ontología, epistemología.

1. Premessa

La problematica del confronto fra teorie è a nostro avviso uno dei temi teorici attuali più affascinanti della didattica della matematica. Lavorare in questo settore richiede non solo conoscenze profonde sulla disciplina, ma vaste conoscenze nel campo epistemologico e anche una certa facilità nel paragonare quegli atteggiamenti, interessi e concetti che il creatore di una teoria mette alla base del proprio costrutto teorico in forma non sempre consapevole.

Molti lavori sono già stati compiuti in questo senso da diversi autori (che citeremo nel corso dell’articolo); ma il vero motivo ispiratore che ci ha spinto a cercare relazioni specifiche (all’inizio per nulla chiare o scontate) tra TS (teoria delle situazioni) e TO (teoria della oggettivazione) ò stata una frase scritta da Luis Radford nel 2017:

> Un domingo de septiembre de 2004, me encontraba almorzando con Guy Brousseau. Ambos fuimos invitados por Bruno D’Amore a la *Convención de didáctica de la matemática* que Bruno y Gianfranco Arrigo organizaron en la Alta Escuela Pedagógica en Locarno, Suiza. (Una domenica di settembre del 2004, stavo pranzando con Guy Brousseau. Entrambi eravamo stati invitati da Bruno D’Amore al *Convegno di didattica della matematica* che Bruno e Gianfranco Arrigo organizzarono nell’Alta Scuola Pedagogica a Locarno, Svizzera).[1] (D’Amore & Radford, 2017, p. 137)

Uno degli autori del presente articolo era dunque presente al momento del celebre pranzo (quella domenica era il 26 settembre) durante il *II Convegno Internazionale di Didattica della Matematica*, Locarno, Svizzera, 24-25 settembre 2004, in qualità di direttore e di responsabile degli inviti. All’evento parteciparono alcuni fra i maggiori nomi della ricerca internazionale in didattica della matematica dell’epoca e dunque anche Luis Radford, allora all’inizio della sua poderosa creazione che, di lì a poco, avrebbe dovuto

[1] Traduzione nostra.

conquistare il mondo della ricerca.

Inoltre, proprio per differenziare il più possibile le due teorie, Radford aveva lanciato l'idea che non si dovesse prendere troppo sul serio, dal punto di vista scientifico, i cosiddetti *ostacoli epistemologici* che costituiscono, insieme a quelli *ontogenetici* e a quelli *didattici*, la terna che definisce l'idea di ostacolo all'interno della TSD. Questa sfida non venne lanciata direttamente a Guy Brousseau, ma a Bruno D'Amore, considerato seguace di quella modalità teorica di pensare alla didattica della matematica. La si affrontò pensando di scrivere un articolo a quattro mani sul tema; ma, per evidenziare il più possibile le reciproche posizioni, si decise di affidare a una persona di grande cultura epistemologica, per la quale entrambi gli sfidanti avevano totale stima, la redazione di domande intelligenti, significative e sottili. La persona scelta fu Giorgio Bagni, stretto collaboratore di D'Amore. Ne nacque un articolo tradotto poi in varie lingue (D'Amore, Radford, & Bagni, 2006). A distanza di anni, si può affermare che la rottura teorica non avvenne; si trattò solo di evidenziare due forme diverse di descrizione dello stesso fenomeno. Nel 2009, per testimoniare il loro debito nei confronti di Giorgio Bagni, D'Amore e Radford scrissero la prefazione a un suo libro (D'Amore & Radford, 2009; Bagni, 2009), purtroppo postumo.

Ancora insoddisfatti del risultato della tenzone che si trascinava da tempo, i … duellanti accettarono l'invito della rivista messicana *Relime* di fungere da editor di un numero speciale dedicato a fare il punto della situazione attuale (nel 2006) sui temi della ricerca semiotica e soprattutto delle sue ricadute didattiche nel mondo della matematica (Radford & D'Amore, 2006). Ma nella TSD non era allora contemplata l'analisi semiotica come strumento didattico e dunque non ci fu, perché non poteva esserci, contrasto teorico, ma grande consonanza di idee, anche in relazione agli inviti da compiere.

Sempre nel 2006, poiché fra le ricerche di Radford e collaboratori in Canada era molto attivo un gruppo di studio sulle relazioni fra comunicazione e apprendimento, si decise di pubblicare in italiano, in una collana della casa editrice Pitagora, un libro di Radford e Demers (2006) su questo argomento; e Radford chiese la prefazione a D'Amore (2006). In quello stesso anno, D'Amore invitò Radford a tenere su quel tema una conferenza plenaria nell'ambito del XX Convegno *Incontri con la matematica*, 3-5 novembre 2006, Castel San Pietro Terme (Bologna), dal titolo: *Convegno del Ventennale* (Atti a cura di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, 2006). Radford tenne la conferenza dal titolo: *Comunicazione e apprendimento, una prospettiva vygotskijana* il cui sunto venne pubblicato sugli Atti (Radford, 2006).

Nel frattempo, anche per dar prova del fatto che un ricercatore nato nell'ambito della TSD non deve per questo ignorare o, peggio, contrastare la TO, vennero pubblicati vari studi specifici come contributo alla riflessione teorica relativa alla TO (D'Amore, 2015, 2017, 2018). Fra i risultati di questi testi, il seguente è degno di nota; che in occasione del *Segundo Coloquio*

Internacional de la Teoría de la Objectivación, Toronto (Canada), 17-20 gennaio 2017, Radford invitò, oltre a vari esponenti della TO, ancora D'Amore, come analista critico della teoria, riconosciuto interprete della TSD; e George Santi, dottorato di D'Amore, come artefice della costruzione teorica della TO dato che nella sua tesi dottorale e in vari articoli l'aveva assunta come base (Santi, 2010, 2011a, 2011b, 2012; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi, & Sbaragli, 2012; D'Amore & Santi, 2018).

Alla fine, si decise di pubblicare un libro a due nomi, nel quale raccogliere articoli precedenti già editi, scelti in modo tale da rafforzare ciascuno le proprie posizioni teoriche (D'Amore & Radford, 2017).

Nonostante questa enorme e assidua possibilità di dialogo pubblico, ad avviso degli autori del presente articolo mancava ancora qualcosa, a mo' di conclusione: una vera e propria analisi, un confronto teorico fra le due teorie, convinti come eravamo e come ancor più siamo che non ci sia quel dissidio che uno dei contendenti dichiarava di vedere, sfruttando i risultati della ricerca contemporanea sull'analisi delle relazioni fra teorie che, in questi ultimi anni, ha fatto passi da gigante.

Tutto ciò spiega il senso di questo lavoro di analisi e di ricerca. È dunque nelle intenzioni degli autori mostrare che TSD e TO sono *parzialmente comparabili* e *parzialmente compatibili* e che hanno *finalità esplicative parzialmente simili*; dunque come ci siano confrontabilità e non contraddizione. Naturalmente sarà nostro compito preciso giustificare, chiarire (o meglio definire) ciascuno di questi termini.

2. La teoria dell'oggettivazione: aspetti teorici e fondazionali

2.1. Discorso ontologico ed epistemologico: Platonismo – Realismo – Empirismo – concezione antropologica

La maggior parte delle teorie che si sono sviluppate in didattica della matematica dagli anni '80 ad oggi sono, talvolta implicitamente, basate su una concezione realista degli oggetti matematici, su una versione platonista del realismo strumentale di Weber, con la differenza, rispetto a una posizione platonista classica, che gli oggetti matematici non sono visti come esterni al mondo sensibile ma come quelli che "lo governano" tramite le leggi naturali (Radford, 2007, p. 1787; Radford, 2008a, p. 221).

La posizione che sta alla base della teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 2008a) è del tutto diversa, in quanto essa non postula l'esistenza degli oggetti matematici, ma li colloca in una prospettiva antropologica, come "emergenti dall'attività umana". Riguardo alla posizione epistemologica il realismo compie, prosegue Radford, un salto di qualità nel diffuso atto di fede basato sulla possibilità di giungere agli oggetti a partire da una qualche forma di astrazione. Infatti, secondo Platone, è il discorso sotto forma di ragionamento svolto in un contesto sociale (una delle tante accezioni del *logos*) a garantire tale possibilità, mentre secondo Descartes essa è garantita dal ragionamento del soggetto con sé stesso, nel dualismo *res cogitans – res extensa*. Il realismo pone come base della propria fede in tale possibilità la sperimentazione scientifica. A differenza di tutte le teorie di impostazione realista, la TO spiega dunque come si perviene agli oggetti matematici, cioè come è possibile arrivare a conoscerli, a prenderne coscienza, a entrare in contatto con essi. Tale risposta è insita nella definizione stessa di oggetto matematico, in quanto l'oggetto matematico non è considerato come preesistente in natura o anche solo in una qualche realtà a-umana, ma è esso stesso un prodotto dell'attività umana. La concezione ontologica su cui si basa la TO è inoltre anti-razionalista poiché

> It also moves away from Rationalist ontologies and their conception of mathematical objects as products of a mind that works folded in onto itself working in accordance to the laws of logic. The theory of knowledge objectification suggests that mathematical objects are historically generated during the course of the mathematical activity of individuals. More precisely, mathematical objects are fixed patterns of reflexive human activity encrusted in the ever-changing world of social practice mediated by artifacts. (Radford, 2008a, pp. 221–222)

Non vi è dunque, in questa posizione antropologica dell'epistemologia, la necessità di compiere un atto di fede, se non nel fatto che l'essere umano sia in generale capace di riconoscere pattern fissi nati nel seno di attività riflessive proprie e altrui e di organizzarli in sistemi di pattern più complessi. Un atto di fede non è necessario poiché, come afferma Lucio Lombardo Radice nella prefazione all'edizione italiana della *Dialettica della natura* di Engels (1955), l'essere umano coincide con la sua produzione (Lombardo Radice citato in D'Amore, 2015), si esprime tramite essa, costruisce la sua e-ità in e per essa (D'Amore, 2015; Radford, 2017).

2.2. Concezione anti-mentalista del pensiero come attività riflessiva

Nello sviluppo epistemologico che ha portato da una concezione platonista classica dei concetti matematici a una concezione realista e materialista, Radford opera una cesura nella quale il pensiero matematico non è circoscritto all'attività della mente (Radford, 2007, p. 1784). Infatti, per Platone, l'*eidos* era considerata esterna, appartenente al mondo delle idee, mentre Agostino di Ippona ne modifica il significato aprendo la strada a quella visione che sarà poi quella razionalista e mentalista, di Descartes e Leibniz, secondo la quale il pensiero ha luogo esclusivamente nella mente individuale ed è evidente solo come relazione puramente intrapersonale. Radford sostiene che tale punto di vista non tiene conto della necessità di risorse culturali per il reale funzionamento del pensiero (Radford, 2007, pp. 1784–1785); queste non hanno la funzione di coadiuvarlo, ma sono costituenti di esso (Geertz, 1973).

Egli sottolinea inoltre la necessità di considerare il pensiero come una pratica sociale (Wartofsky, 1979), cioè una *praxis cogitans*; il pensiero non è dunque una pura attività mentale, ma ha bisogno di una mediazione per la sua realizzazione e la sua stessa esistenza. Il ruolo di mediatore per il pensiero viene svolto dagli artefatti che orientano e materializzano il pensiero diventandone parte integrante. Radford introduce la nozione di "zona del pensiero artefattuale", il territorio (immaginario, ideale, condiviso) in cui si sovrappongono la soggettività del piano mentale dello studente e l'oggettività culturale del piano sociale (Radford, 2008a, p. 219), estendendo la mente dell'individuo "oltre la sua pelle", oltre la sua individualità (Wertsch, 1991).

Il pensiero non è visto come assimilazione (come avviene nel comportamentismo), né come costruzione *ex nihilo* (come avviene nel costruttivismo), ma come ri-flessione, cioè un movimento dialettico tra la realtà socioculturale e l'individuo che la rifrange: da un lato l'essere umano che pensa, crea gli oggetti del pensiero, ma allo stesso tempo riflette la realtà culturale a cui appartiene ed è plasmato da essa, nel senso che quest'ultima determina il suo modo di percepire e di intendere la realtà, cioè le sue *manières de viser* (Merleau-Ponty, 1945). L'attività riflessiva "costituisce" e conforma il pensiero e il suo prodotto, vale a dire la conoscenza. Il significato degli oggetti/concetti matematici si identifica con l'attività riflessiva i cui mediatori appartengono a un sistema semiotico di significazione culturale (Radford, 2003a, 2005). Gli artefatti mediano l'attività riflessiva secondo il significato culturale di cui sono portatori. Per esempio, il compasso media il concetto di circonferenza in quanto incorpora strumentalmente e culturalmente la sua definizione sintetica come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro.

2.3. Apprendimento

Nella TO l'idea di apprendimento prende in esame due dimensioni che sono strettamente correlate tra loro: la dimensione relativa all'accesso alla conoscenza concettuale della matematica (per esempio l'apprendere attraverso la risoluzione di problemi) e la dimensione dell'accesso al modo di essere della conoscenza della matematica, inteso come "essere con gli altri", quel che altri autori chiamano "comunità di pratica" (D'Amore & Godino, 2006; D'Amore, 2017), la relazione con altri da sé che condividono con il singolo individuo un'azione culturale e l'uso di artefatti (concreti o puramente mentali e astratti). Apprendere matematica significa nella TO vedere e percepire il mondo in modo matematico – questa accezione dell'apprendimento apre ad una più esaustiva ed efficace nozione di competenza, come ha già evidenziato Fandiño Pinilla (2005), distinguendo una competenza interna alla matematica e una che si manifesta nel saper vedere il mondo con occhi matematici. L'apprendimento non è quindi identificabile con uno specifico funzionamento cognitivo finalizzato a certe performance o alla risoluzione di problemi; tali attività sono solo alcuni dei mezzi per realizzare quel tipo di *praxis cogitans* o riflessione matematica che chiamiamo nel suo complesso "pensiero matematico". La prima di queste due dimensioni riguarda i meccanismi e gli strumenti per l'accesso alla conoscenza matematica, mentre la seconda dimensione riguarda il ruolo della classe come insieme di studenti che condividono prassi, come comunità in cui l'individuo dà significato al sapere culturale anche come scambio di relazioni sociali e realizza sé stesso attraverso l'essere-con-gli-altri. Le due dimensioni sono distinguibili ma non separabili, in quanto l'una non può realizzarsi senza l'altra.

Per la didattica della matematica il problema centrale da chiarire, se ci si colloca all'interno della TO, è come si accede alla conoscenza già depositata, storicizzata, "ufficiale" e costituente una cultura socialmente riconosciuta. In questo senso essa è chiamata a dare una risposta epistemologica, cioè relativa non solo agli oggetti matematici ma anche, e forse soprattutto, alle modalità di accesso a essi.

La risposta fornita della TO è coerente con la sua caratterizzazione ontologica e si distanzia soprattutto da una concezione costruttivista dell'acquisizione della conoscenza. Radford sottolinea infatti la differenza della TO rispetto alle teorie classiche di tipo costruttivista in didattica della matematica, affermando che queste ultime assumono, anche se spesso solo implicitamente, una posizione ontologica di stampo realista (Radford, 2007).

La concezione epistemologica kantiana, sulla quale si basano talvolta implicitamente secondo Radford le teorie classiche in didattica della matematica (Radford, 2007, p. 1788), è legata al cambiamento sociale e culturale determinato dall'introduzione sistematica delle manifatture, cioè dall'espansione e dalla sistematizzazione dell'attività economica e di quella della produzione nel superamento del sistema feudale, e si distingue dalla concezione puramente mentalista dei razionalisti (ancora Descartes, Leibniz, …), per i quali l'individuo può giungere alle verità matematiche esclusivamente attraverso un'attività mentale introspettiva, nonché da quella degli empiristi (Locke, Hume, …), per i quali l'individuo riceve passivamente input sensoriali che usa per formulare idee. Infatti, per Kant il pensatore è un essere in azione: "the individual is craftsman of his/her own thinking" (Radford, 2008a, pp. 222–223). Citando Arendt (1958), Radford sintetizza il cambiamento epistemologico che porta da un'epistemologia legata all' "oggetto che si apprende", tipica dell'uomo medievale, a un'epistemologia legata al processo, cioè al "come si apprende", tipica dell'uomo moderno. Per dirlo in termini filosofici, dall'uomo a-individuale la cui esistenza e il cui senso sono strettamente e unicamente legati a una società de-personalizzante di appartenenza e sudditanza (religiosa, sociale, …) a un essere produttore, faber (*Faber est suae quisque fortunae*), essere cosciente della sua stessa esistenza e della propria produzione. Nonostante consideri il processo di costruzione e non il suo oggetto, la concezione kantiana non si distacca però da un’impostazione razionalista della conoscenza e della sua costruzione, né individuale né collettiva. La dicotomia processo-oggetto richiama, in seno al razionalismo, la dicotomia soggetto-oggetto, che è stata superata dallo stesso Kant:

> Debemos también hacer una segunda esencial distinción entre los racionalistas. Dado que el conocimiento tiene dos polos, el sujeto que conoce y el objeto conocido, debemos distinguir entre quienes consideran el principio activo, o criterio de verdad, en el primero y quienes lo atribuyen al segundo. Tenemos así los idealistas, en el primer caso, Fichte, Schelling, Hegel, y los realistas, Aristóteles, Leibniz, Espinoza. En medio está Kant: las formas a priori están en el sujeto, y constituyen un filtro obligado para el objeto, que no es conocido sino mediante su construcción en forma de “fenómeno” (Kant, 2000). (D’Amore, 2018, p. 106)

Radford sottolinea il fatto che, nonostante la concezione costruttivista sia interessante dal punto di vista storico, essa fa sorgere molte questioni, come per esempio la condanna di un soggettivismo estremo che, se fosse stato reale, avrebbe condannato l’umanità a rimanere ancora nelle caverne, impegnata a cercare di accendere il fuoco (Laborit, 1985, citato in Radford, 2008a, p. 223), dato che il costruttivismo non spiega, non implica, non contempla l’evoluzione culturale della ricerca di idee nuove, ma il semplice raggiungimento di determinati obiettivi. Inoltre, afferma Radford, l’idea della conoscenza come costruzione personale è ancora più problematica nell’ambito dell’insegnamento-apprendimento (Lerman, 1996; Radford, 2008b) e a tale proposito condivide la posizione di Brousseau, secondo il quale un costruttivismo radicale è un’assurdità in didattica della matematica (Brousseau, 2004). Tale assurdità risiede, secondo Radford, nel fatto che non vi è alcuna garanzia che lo studente giunga, nella propria costruzione, alla forma istituzionale della conoscenza, cioè al *savoir savant* auspicato, e che è necessaria sempre un’istituzionalizzazione esterna della conoscenza che emerge dall’attività in aula; altrimenti lo studente rischia di non sapere di sapere (Brousseau citato in Radford, 2008a, p. 216). Oppure, lo studente si crea, complice talvolta il docente e la sua scelta di attività condivise, delle convinzioni mal fondate sul sapere o delle illusioni basate su quelli che Brousseau chiama “effetti” (D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010). A proposito del costruttivismo, Radford afferma che:

> Constructing knowledge by oneself is certainly *one* form of knowing among others. But stating that this is the only possible one fails to capture the diversity of cognitive forms of learning, knowing and being that can be found in the mathematics classroom. (Radford, 2008a, p. 223)

La risposta della TO al problema epistemologico è, come già evidenziato in precedenza, strettamente legato alla sua concezione ontologica: dato che gli oggetti matematici sono dei pattern fissi emergenti dall'attività matematica di società all'uopo costruite, non è possibile affermare che essi vengono costruiti o ricostruiti; si tratta di un processo di attribuzione di significato agli oggetti concettuali che lo studente trova già presenti nella propria cultura, come emergenti e costituenti da/di essa. Infatti:

> According to the theory of objectification, learning does not consist in constructing or reconstructing a piece of knowledge. It is a matter of endowing the conceptual objects that the students find in his/her culture with meaning. The acquisition of knowledge is a process of active elaboration of meanings. (Radford, 2007, pp. 1787–1788)

Torniamo però alla domanda iniziale: come si accede alla conoscenza depositata nella cultura? Cioè: che cosa sostituisce nella TO la fede del realista nella possibilità di accedere agli oggetti matematici per astrazione?

Secondo la TO, le "condizioni al contorno" nell'accesso alla conoscenza depositata nella cultura sono date dalla presenza delle seguenti tre componenti: (1) gli artefatti, (2) l'interazione sociale, (3) l'oggettivazione e la soggettivazione. Il pensiero che consente tale accesso è, come già evidenziato, un'attività riflessiva mediata dagli artefatti e si svolge all'interno della zona del pensiero artefattuale, che è il territorio (immaginario ma socialmente determinato, dunque esistente e reale) in cui si sovrappongono la soggettività del piano mentale dello studente e l'oggettività culturale del piano sociale (Radford, 2008a, p. 219). Essendo gli oggetti matematici degli oggetti concettuali che si prefigurano come dei pattern fissi nell'attività riflessiva, co-costruiti nelle attività sociali più volte dette, acquisire conoscenza matematica nella TO significa rivestire di significato tali oggetti concettuali attraverso un'attività riflessiva condivisa, che Radford chiama *oggettivazione,* mediata dagli artefatti culturali, all'interno di un sistema semiotico di significazione culturale (Radford, 2008a, pp. 229–230).

Data la natura artefattuale ed *embodied* del pensiero (Radford, Edwards, & Arzarello, 2009; Nemirovsky, 2003; Roth, 2001; Seitz, 2000), nella TO è necessario spiegare in che modo viene mediata tale attività riflessiva; per fare ciò Radford fa riferimento ai cosiddetti *mezzi semiotici di oggettivazione* che egli definisce come segue:

> These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call *semiotic means of objectification*. (Radford, 2003b, p. 41)

Vedremo di seguito come si caratterizzano le componenti appena descritte e come esse interagiscono configurando quel fenomeno sociale che chiamiamo "apprendimento".

2.4. La conoscenza depositata negli artefatti

Gli artefatti hanno il ruolo di stabilire il contatto con il mondo, “materializzando” il pensiero e facendolo diventare “thinking-with-and-through-artifacts” (Radford, 2008a, p. 223); ma essi sono anche depositari dell’attività cognitiva e quindi della conoscenza raggiunta, costruita, depositata in un ipotetico forziere culturale sociale, dalle generazioni precedenti. Tuttavia gli artefatti non agiscono autonomamente come mediatori, non possono farlo, non avendo una esistenza, una corporalità, una coscienza di sé; essi necessitano di attività sociali umane che diano loro senso e di un essere umano che li sappia usare e che sia in grado di riconoscere, individuare, sfruttare l’intelligenza in essi depositata e di poter dunque aiutare altri (per esempio gli allievi) a scoprirla da sé, a farla propria nell’ambito di un progetto sociale, opportunamente condiviso (Radford, 2008a).

2.5. L’interazione sociale

Nella TO l’aula scolastica non è vista solo come uno spazio materiale in cui negoziare significati e adattare sé stessi all’ambiente; questo sì, ma essa è anche uno spazio simbolico che veicola valori scientifici, etici, estetici e altri storicamente costituiti, impressi nei “linguaggi sociali” (Bakhtin, 1986), e forma le capacità umane: “Rather than performing a merely adaptive function – a catalyzing or facilitating one – interaction is consubstantial to learning” (Radford, 2008a, p. 225).

L’attribuzione di significato che si basa sulla dimensione materiale (tramite gli artefatti) e su quella sociale (tramite l’interazione sociale) “has profound psychological importance inasmuch as it is both a progressive immersion into cultural forms of thinking as well as the process of development of the specific capacities of the individual – cognitive, ethical, subjective, etc.” (Radford, 2008a, p. 225).

2.6. Oggettivazione e soggettivazione

Nel contesto della TO, apprendere – che può essere riassunto sotto i termini oggettivazione-soggettivazione e che può essere visto come il processo che coinvolge “la soggettivazione e la trasformazione dovute all’apprendimento e all’oggettivazione” (D’Amore, 2015, p. 155) – non significa solo acquisire qualcosa nel senso di impossessarsene, ma significa anche entrare a far parte attiva della cultura esistente e socialmente/storicamente depositata e costruita, per trovare qualcosa in essa. In questo senso non si tratta, ribadisce ancora una volta Radford, di una costruzione o di una ri-costruzione o di una ri-produzione o re-invenzione, ma dell’atto con cui l’individuo, che incontra l’altro (nelle diverse accezioni del termine) e gli oggetti culturali, trova sé stesso (Radford, 2008a, p. 225): “This creative process of finding or noticing something (a dynamic target) is what I have termed elsewhere a process of *objectification* (Radford, 2002)" (Radford, 2008a, p. 225).

L'oggettivazione è dunque il processo creativo tramite il quale il soggetto oggettiva la conoscenza culturale e, così facendo, trova-costruisce-riconosce-crea sé stesso, in un atto riflessivo che può essere chiamato *soggettivazione* (Radford, 2008a, p. 225); il "prodotto" di questo processo è in realtà la natura umana stessa, intesa come il processo di creazione dell'uomo storico, che emerge come il valore non solo del proprio lavoro, ma anche delle proprie origini culturali e sociali (D'Amore, 2015, pp. 155–156). "Conoscere", nel contesto della TO, è dunque nello stesso tempo un processo, un modo d'essere e di divenire, una modalità attiva di appartenenza alla società storica e culturale nella quale si è immersi, finalmente con consapevolezza.

2.7. L'aula di matematica come spazio ideale di apprendimento. Il ruolo dell'attività di apprendimento

Secondo la definizione di "attività" data da Leontiev (1969), a cui Radford fa di frequente riferimento, uno degli elementi centrali di tale concetto è il suo obiettivo (*objective*). Nella conoscenza dell'obiettivo vi è necessariamente un'asimmetria tra studente e docente: lo studente non conosce il vero obiettivo dell'attività mentre il docente sì. Tale asimmetria non è però da intendersi come un celare, un tenere nascosto allo studente il vero fine dell'attività, quanto come una condizione insita nel concetto stesso di apprendimento: se lo studente conoscesse già l'obiettivo non avrebbe bisogno di apprenderlo. Ciò che distingue la TO dalle teorie classiche nell'attribuzione del ruolo all'apprendimento è la sua dimensione etica, che va oltre a quella relativa alle competenze matematiche; in essa vi è un'unione tra il sapere concettuale (realizzato tramite la risoluzione di problemi) e l'essere in matematica, essere come individuo inserito in una società etica (fatta di principi, di norme, di idee condivise), culturale, storicamente determinata cui l'individuo appartiene, ma ancora spesso non consapevolmente. Come afferma Radford:

> Behind the objective of the lesson, there lies a greater and more important objective – the generally held objective for the teaching and learning of mathematics – namely, the elaboration on the part of the student of a reflection defined as a communal and active relationship with his/her cultural historical reality. Unfortunately, the learning of mathematics has often been reduced to merely obtaining a certain conceptual content. (Radford, 2008a, p. 226)

Il concetto di attività ha una valenza particolare nella TO non solo in riferimento alla definizione del suo obiettivo, ma anche in riferimento alla sua caratterizzazione intrinseca. Tale concetto ha acquisito un significato peculiare nella TO, tanto da richiedere una terminologia propria, specifica, individuata da Radford nel termine *labour* che riteniamo necessario spiegare in dettaglio poiché esso è essenziale per la comprensione del concetto di insegnamento-apprendimento nella TO.

Radford (2014a) analizza i processi di insegnamento-apprendimento che si sviluppano in aula attraverso la categoria marxista della logica di produzione, l'insieme di convinzioni, visioni del mondo, atteggiamenti, sensibilità e valori che regolano anche l'attività in aula. Essa determina la conoscenza e le soggettività, quelle degli allievi e dell'insegnante, che vengono co-prodotte nell'aula di matematica, uno spazio metaforico, oltre che fisico, in cui gli individui creano un gruppo sociale le cui caratteristiche e i cui scopi possono essere inquadrati con accezioni molto diverse tra di loro, in maniera tale da determinare implicitamente anche il concetto stesso di azione e di valore del suo frutto, cioè del *labour* (D'Amore, 2015, pp. 159–161). La logica di produzione costitutiva delle due principali correnti in educazione matematica dello scorso secolo, il programma trasmissivo e quello progressivo, ha le seguenti caratteristiche:

- la matematica è considerata come un'entità a sé stante, invariabile e avulsa dai processi storici e culturali in cui si è sviluppata; un bene di consumo che lo studente deve in qualche modo arrivare a possedere;
- in questa logica utilitaristica e consumistica della conoscenza, la relazione tra insegnante e allievi è un rapporto di potere (ovviamente caratterizzando questo termine in modo opportuno) che regola i processi attraverso i quali lo studente si appropria di un sapere matematico codificato e determinato per lui [si pensi alla dicotomia: sapere personale/sapere istituzionale (Godino & Batanero, 1994; Chevallard, 1999)].

Anche se determinati dalla stessa logica di produzione, i programmi trasmissivo e progressivo attribuiscono ruoli diversi all'insegnante e all'allievo. Nel programma trasmissivo, l'insegnante gioca un ruolo attivo nel "consegnare" il sapere all'allievo. In quello progressivo, l'allievo gioca un ruolo attivo in quanto l'apprendimento può avvenire solo se egli costruisce autonomamente il proprio sapere e l'insegnante assume il ruolo di un "consulente finanziario" (Radford, 2014a) che facilita i processi di apprendimento che però devono essere amministrati dall'alunno stesso, dato che questi sviluppa un ruolo attivo e mette sé stesso in gioco.

La logica di produzione utilitaristica e consumistica sottostante il programma trasmissivo e quello progressivo porta a una situazione che viene definita alienante (Radford, 2014a, 2016), in quanto l'attività che ne risulta non è una *forma di vita* (Radford, 2008a, 2016), non è la manifestazione dell'esperienza sensibile dell'individuo nella sua espressione materiale, intra e inter-personale e storico culturale, ma è una forma di sudditanza gerarchica e sociale (Marx, 1962, 1968). Nell'attività matematica, l'individuo è alienato nella relazione con gli altri e dalla dimensione storico-culturale che costituisce il significato più profondo del sapere matematico.

> Alienation consists instead in the precise fact that the produced object is no longer the individual's expression. What is alienating here is hence the loss of

> expressivity of life in the object. To put it succinctly, alienation is the loss of objectivation. The loss of objectivation – i.e., the loss of self-expression in the object – can only be alienating for a species, like ours, for which objectivity is part of its nature. Instead of expression, achievement, and self-realization, we have a product that becomes a thing. (Radford, 2016, p. 261)

La logica di produzione della TO, che deriva dalla dialettica materialista, si basa su presupposti radicalmente diversi da quelli descritti sopra.

La matematica è il risultato di ed è prodotta dal lavoro sociale dell'essere umano, una sintesi culturale dell'agire umano, un sapere dinamico e in continua evoluzione. Il sapere matematico non si configura come un'entità eterna e immutabile, è sempre presente e continuamente costruito, in potenza nelle sue indefinite possibili determinazioni e in atto nell'attività riflessiva mediata. Il sapere matematico non è rappresentabile, acquisibile, qualcosa di cui ci possiamo appropriare, è indeterminato e generale, ma oggettivabile in *modalità di produzione della conoscenza* (Radford, 2014b, 2016). Affinché esso diventi un oggetto del pensiero e della coscienza individuale è necessario metterlo in movimento – produrlo, nel senso etimologico di portarlo davanti – attraverso la mediazione culturale dell'attività riflessiva.

La logica di produzione dialettico-materialistica riposiziona il ruolo dell'insegnante e dell'allievo nei processi di insegnamento-apprendimento, concepiti come attività nelle quali insegnanti e allievi producono *insieme* il sapere matematico, secondo *forme di collaborazione umana* (Radford, 2014a, 2016). Insegnanti e allievi, nello scenario storico e culturale cui appartengono entrambi, anche se in forme personali e sociali diverse, conducono l'attività insieme, lavorano insieme per produrre collettivamente la conoscenza matematica attraverso modi di pensare e di agire dinamici e collettivi, che includono modalità di indagine matematica, concezioni della verità, ricerca di evidenze matematiche, argomentazione matematica, uso di simboli e costruzione di significati.

Nell'alveo della dialettica materialista, all'interno del quale si è sviluppata la TO, la conoscenza ha una doppia natura, in *potenza* e in *atto*. La conoscenza è una sintesi culturale delle pratiche umane, dinamiche e in continua evoluzione. Da un lato possiamo considerare tali pratiche come pura possibilità, vale a dire in potenza, indeterminate, generali e non rappresentabili: "This is what school knowledge is when the student crosses for the first time the school door – *pure open possibility*." (Radford 2014a, p. 7). Dall'altro, è possibile considerarle determinate, in atto, situate in uno specifico contesto sociale come potrebbe essere la vita d'aula. L'oggettivazione è quel processo che, attraverso l'attività riflessiva mediata, permette alla conoscenza nella sua dimensione indeterminata e in potenza di assumere una specifica e concreta determinazione culturale, come conoscenza in atto.

> In this context the general/singular (or abstract/concrete) are not two opposed,

> disjoint kinds. They are two entangled ontological categories – two moments in the becoming of knowledge. This is why, in its becoming through activity, knowledge and concepts are simultaneously abstract and concrete. (Radford, 2014a, pp. 7–8)

L’insegnamento e l’apprendimento non sono due attività separate, ma la stessa e unica attività nella quale, insegnante e allievi, con compiti diversi, *si impegnano insieme*, intellettualmente ed emozionalmente, nella produzione di una conoscenza – vale a dire l’incarnazione di una delle sue possibilità, attivate dall’agire sociale e culturale di insegnanti e allievi i quali entrano così a far parte della società che tali conoscenze ha elaborato e costruito (Radford, 2016, p. 5). Nella logica di produzione dialettico-materialistica, le forme di collaborazione umana sono ispirate a precisi valori etici: si tratta di *un’etica comunitaria* (Radford, 2014a) che promuove forme di interazione umana suggerite, proposte, create dalla solidarietà, l’impegno, la responsabilità e la cura. Un’etica basata su una concezione non essenzialista dell’individuo che si costituisce nella relazione con l’alterità.

Le modalità di produzione della conoscenza e le forme di collaborazione umana sono intrecciati in quello che Radford (2014a, 2016, 2018) chiama *joint labour*. Il *joint labour* rappresenta il punto di incontro dei processi di oggettivazione e soggettivazione. Da un lato, nel *joint labour* si realizza l’attività che conduce dal sapere come possibilità in potenza a una sua attualizzazione determinata (oggettivazione) e dall’altro, al contempo, insegnanti e allievi co-producono, con le stesse azioni, la propria individualità (soggettivazione). Così come il sapere ci appare come pura possibilità di conoscenza, anche i modi d’essere della soggettività umana si presentano come pura possibilità, possibilità di divenire (Radford, 2014a). Nel *joint labour* si supera la dicotomia insegnante-allievo, prigioniera dei rapporti di potere tipici di una visione consumistica e privatistica dell’apprendimento. L’insegnante e i suoi allievi sono fusi nel loro obiettivo comune di produrre conoscenza e co-produrre loro stessi, trasformando il lavoro in aula da esperienza alienante a esperienza di compiutezza estetica, intellettuale e sociale. Radford (2006) paragona la relazione tra l’insegnante e i suoi allievi a quella che si instaura tra il direttore e la sua orchestra:

> She (the teacher) *needs* the students – very much like the conductor of an orchestra, who may know Shostakovich’s 10th Symphony from the first note to the last, needs the orchestra: it is only out of joint labour that Shostakovich’s 10th can be produced or brought forward and made an object of consciousness and aesthetic experience.
> Now, the ‘need’ to which I am referring here is not merely rational. The ‘need’ is thoroughly *emotional*. It requires a deep emotional connection between participants. Thus in the best musical performances, the conductor and the musicians work truly collectively, attuning and responding to each other. Maybe

> one of the best examples of joint labour is the amazing tuning of Venezuelan conductor Gustavo Dudamel and the Simón Bolivar Youth Orchestra (see http://www.youtube.com/watch?v=XKXQzs6Y5BY#aid=P9NiWZi3QJQ particularly from 27:50 to 35:00). This musical example intimates that forms of (musical) knowledge production are deeply entangled with forms of human interaction and cooperation. The same is true of classroom mathematical knowledge. The mathematics teacher and the students *need* to labour together to bring forward various mathematical interpretations and make them the object of an intellectual, reflective, and aesthetic experience. This joint labour is, simultaneously, intellectual and emotional; they cannot be separated. They are two sides of the same coin. We may conclude, then, by noticing that, although there is a division of labour that is induced by the manner in which teachers and students engage in their joint labour – division of labour that has to do with the teacher's awareness of the didactical intentions, etc. – the teacher and the students need each other to bring knowledge forward.
> The communitarian ethic mentioned in the previous section finds its full expression in the theoretical articulation and practical elaboration of this mutual 'need' of teachers and students. (Radford, 2014a, pp. 11–12)

Come afferma Radford, l'attività a cui si riferisce il termine *labour* non è quella dell'essere semplicemente occupati con qualcosa (Aktivität in tedesco / aktivnost' in russo), ma deve essere intesa come Tätigkeit (in tedesco) / deyatel'nost' (in russo): "una forma sociale di comune tentativo attraverso il quale gli individui producono i loro mezzi di sostentamento mentre producono loro stessi come esseri umani" (Radford, 2018, p. 141).

L'essere umano è soggetto attivo nell'attività creativa, che "comprende nozioni di auto-espressione, sviluppo razionale e piacere estetico" (Donham, 1999, p. 55, citato in Radford, 2018, p. 141). Citando ancora Radford: "Più precisamente, *attività* come Tätigkeit/ deyatel'nost' è una *forma di vita*" (*ibidem*); una forma di vita che è tale nel vivere-con-gli altri dell'individuo. Per evitare la confusione con altri significati, nella TO l'attività intesa come Tätigkeit/ deyatel'nost' è, come abbiamo già detto, chiamata *joint labour* (Radford, 2014a, 2016).

Il concetto di *joint labour* è la categoria base della TO; esso la differenzia dalle teorie di stampo razionalista ed empirista (Radford, 2018, p. 141) poiché assume un ruolo centrale basato su una concezione antropologica dialettica materialista. Citando Spinoza, Radford sottolinea come l'essere umano sia un essere naturale che, alla pari di tutti gli esseri naturali, cerca fuori da sé il soddisfacimento dei propri bisogni.

> To meet their needs (needs of survival and also artistic, spiritual, and other needs created by/in society), humans engage themselves actively in the world. They produce. What they produce to fulfil their needs occurs in a social process that is, at the same time, the process of the individuals' inscription in the social world and the production of their own existence. The name of this process is what in the previous section I have termed joint labour. Sensuous, material *joint labour* is

> considered the ultimate field of aesthetic experience, subjectivity, and cognition. Joint labour as the central category of the TO asserts the fundamental ontological and epistemological role of matter, body, movement, action, rhythm, passion, and sensation in what it is to be human. (Radford, 2018, p. 141)

Per comprendere meglio perché Radford considera quello di *joint labour* come la categoria concettuale alla base della TO, è sufficiente riflettere sulle implicazioni che essa ha sulla concezione dei ruoli degli attori del processo di insegnamento-apprendimento e sul processo stesso. Nella prospettiva del *joint labour* proposta da Radford, non è possibile distinguere un'attività di insegnamento da una parte e un'attività di apprendimento dall'altra: si tratta di un'unica attività lavorativa che non può essere svolta se non insieme, perseguendo un fine comune. L'individuo, che è un'entità relazionale, prende parte al *joint labour* ed è "profoundly linked to an ensemble of material and immaterial relationships with other parts of nature – including social relationships – and is based on culturally and historically constituted conditions of life" (Radford, 2018, p. 141).

2.8. I livelli di generalità

Come già evidenziato in precedenza, nell'ambito della TO gli oggetti matematici sono dei pattern fissi dell'attività riflessiva incapsulati nella cultura creata dalla società di appartenenza degli attori del *joint labour*. Tali pattern fissi hanno tuttavia diversi livelli di generalità, in base al mezzo semiotico che oggettiva il significato culturale che essi rappresentano. L'attività di insegnamento (cioè la parte del *joint labour* convenzionalmente riferita all'insegnante dal punto di vista sociale e pragmatico) consiste dunque nell'offrire situazioni ricche e significative che consentano allo studente di percepire i diversi livelli di generalità nell'interazione con gli altri, supportati dai significati forniti dagli artefatti e dall'interazione sociale tra studenti o tra insegnante e studenti (Radford, 2008a, p. 226). L'apprendimento in matematica è caratterizzato dalla possibilità di integrare e ripercorrere i diversi livelli di generalità:

> For the student, the learning process [cioè la sua parte del *joint labour*] consists in becoming receptive to others and fluidly conversant with the various layers of generality of the object and their enabling forms of action – e.g. techniques and reflections on these techniques (Bosch & Chevallard, 1999), modelling (Lesh et al., 2003), etc. (Radford, 2008a, p. 225)

2.9. Da una concezione trasmissiva dell'insegnamento all'apprendimento come joint labour

Possiamo dire che la TO studia in maniera molto approfondita e coerente l'accesso alla conoscenza, un aspetto che non era contemplato dalle teorie precedenti in didattica della matematica, i cui lavori pionieristici erano più interessati ad affermare la *possibilità* di analisi e studio del fenomeno dell'acquisizione di conoscenza, in un periodo storico in cui la didattica della matematica stava emergendo come una nuova scienza e in cui era necessario mettere in luce la necessità di una emancipazione cognitiva dello studente dal modello autoritario e trasmissivo della conoscenza. Il concetto di *costruzione*, la cui intrinseca intenzionalità mette in luce la necessità di una presa in carico della propria conoscenza (D'Amore, 1999, 2003), acquisisce così una posizione centrale nelle teorie didattiche che sorgono in quel momento storico e verrà poi riconosciuto come fondante delle stesse teorie. La TO evidenzia non solo che un costruttivismo puro è un'assurdità, ma caratterizza l'apprendimento come un processo ricorsivo di oggettivazione e soggettivazione della conoscenza storico-sociale semioticamente codificata, i cui strumenti sono i mezzi semiotici di oggettivazione e gli artefatti. La TO mette allo stesso tempo in luce molti aspetti determinanti per l'accesso alla conoscenza e che sembrano essere in aperta contraddizione con una concezione costruttivista: la dimensione storica e sociale dei concetti matematici, non solo in riferimento a una loro interpretazione storico-epistemologica, ma anche e soprattutto in riferimento al processo di apprendimento; l'impossibilità di considerare l'apprendimento e l'insegnamento come due processi separati e la conseguente necessità di considerare un'azione congiunta, esprimibile tramite il concetto di *joint labour*; la necessità di recuperare la dimensione soggettiva in chiave molto diversa rispetto a quella di un soggetto che apprende adattandosi a un ambiente, cioè considerando come forza propulsiva dell'azione soggettiva la realizzazione di un soggetto, di un Io sociale, di un'azione il cui contesto naturale è il *joint labour*, in assenza del quale si produce alienazione.

3. La teoria delle situazioni: aspetti teorici e fondazionali

3.1. Nascita della teoria delle situazioni su basi empiriche

La teoria delle situazioni (TSD) è senza alcun dubbio la prima teoria nata in seno a quella scienza che, dopo varie vicissitudini, si chiamò "Didactique des mathématiques" (DdM); la contemporaneità, a nostro avviso, è dovuta al fatto che la nascita della TSD deve essere identificata con la fondazione della scienza che la tenne a battesimo. Senza alcun dubbio di smentita affermiamo inoltre che entrambe queste costruzioni teoriche hanno come comune artefice Guy Brousseau, non a caso nel 2003 prima medaglia Felix Klein dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

A testimonianza della precedente affermazione citiamo riferimenti bibliografici assai diversi e distanti tra loro nel tempo, fra le molte centinaia che si potrebbero indicare (Artigue, Gras, Laborde, & Tavignot, 1994; Brousseau, 1997, 2015).

In occasione del Convegno Internazionale cui si fa riferimento nell'ultima citazione (Santa Marta, Colombia, 2015), Guy Brousseau presentò (il giorno dell’inaugurazione) un video realizzato sotto forma di intervista, di estremo interesse dal punto di vista storico, nel quale racconta con dovizia di particolari e in prima persona singolare, le avventure connesse a questa doppia creazione, non priva di difficoltà (Brousseau, 2015).

Brousseau è autore a tutt’oggi (2019) di più di 1000 pubblicazioni, in un certo senso tutte inerenti il tema qui delineato; scegliamo di citare qui di seguito solo quelle che vanno dalle prime origini (1965) al 1986, l’anno che molti di noi considerano la fine delle anticipazioni a-sistematiche e l’inizio ufficiale della scienza DdM e della TSD, quando vide la luce un articolo che possiamo considerare come uno dei più citati dagli studiosi internazionali che si occupano delle origini della DdM (Brousseau, 1986b). Esso corona più di 20 anni di sforzi, di studi, di ricerche, di riflessioni anche concrete in aula,[2] secondo un paradigma teorico di prim’ordine (Brousseau, 1965, 1972, 1975, 1976, 1980a, b, 1981, 1982, 1984, 1986b; Brousseau & Pères, 1981).[3]

Va detto che:

a) pubblicare studi di questo tipo, così all’avanguardia, senza nulla di analogo, così lontani dalle abitudini legate a suggerimenti pratici, senza riferimenti alla matematica accademica, era tutt’altro che facile in quell’epoca, dominata dai giocattoli didattici creati e dagli strumenti spacciati per miracolosi ideati da vari inventori (Zoltan Dienes, George Papy, Georges Cuisenaire, …) (D’Amore, 1999, pp. 32–51);
b) ancora per quasi un decennio dopo la pubblicazione di Brousseau (1986b), le problematiche dell’insegnamento-apprendimento della matematica si identificavano con la divulgazione matematica e con l’uso in aula di giocattoli o strumenti; ciò ha portato a distinguere due fasi nella storia della DdM, una prima fase A (*ars docendi*) tutta dedita alle problematiche relative all’insegnamento, una seconda fase B nella quale l’attenzione si sposta decisamente sull’apprendimento (dopo la metà degli anni ’80) (D’Amore, 1999; D’Amore, 2003).

È allora doveroso ricordare immediatamente che, pur facendo dell’apprendimento della matematica il fulcro dell’azione di ricerca e il

[2] Fin dal 1962 Guy Brousseau e i suoi collaboratori, hanno effettuato esperienze dirette in aula, all’inizio a Talence, vicino a Bordeaux, presso la scuola J. Michelet e poi in molte altre. Fra le insegnanti che diedero un forte impulso teorico ci piace ricordare Nadine Labesque (poi Brousseau). Sugli aspetti pragmatici e concreti della base empirica della TSD torneremo più volte.

[3] Tra il 1970 ed il 1973 Guy Brousseau pubblicò diversi articoli nei quaderni dell’IREM di Bordeaux 1 dal titolo: “Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73”; ma poi queste pubblicazioni continuarono fino al 1978. Impossibile citare formalmente queste pubblicazioni perché spesso si tratta solo di fogli dattiloscritti e ciclostilati o fotocopiati, di impossibile reperimento.

massimo interesse nella nuova DdM, essa non si pone come obiettivo quello di stabilire *come* avviene il fenomeno dell'apprendimento, anche se riusciremo comunque ad evincere alcune ipotesi traendole dai testi. In quell'epoca dominavano le tesi a questo proposito di Jean Piaget che possiamo così sintetizzare: ogni conoscenza si costruisce attraverso un'interazione costante tra il soggetto apprendente e l'ambiente, grazie all'oggetto il cui apprendimento è in gioco, secondo fasi strettamente determinate. I contenuti di tale apprendimento sono la base a partire dalla quale si sviluppa la gerarchia delle strutture mentali dell'apprendente.

Nel delineare l'adattamento dell'apprendente all'ambiente si usa spesso la dicotomia "assimilazione e accomodamento":

> Per "assimilazione" va inteso quel processo per cui ogni nuovo dato di esperienza viene incorporato in "schemi mentali" che già esistono nel bambino (schemi di azione, ovvero percettivo-motori e schemi di spiegazione o previsione) senza tuttavia che, in seguito a tale incorporazione, abbia luogo alcuna modificazione di tali schemi. (…).
> Il termine "accomodamento" indica un processo complementare al primo. I nuovi dati di esperienza che vengono incorporati in schemi già posseduti, modificano questi ultimi, adattandoli ai nuovi ed inattesi aspetti che la realtà dimostra di possedere. (Petter, 1961, pp. 23–24)

Non sembra così rilevante l'interazione allievo-docente, che invece assumerà importanza decisiva nella TSD, come vedremo, ribaltando le ipotesi piagettiane.[4]

In più occasioni l'opposizione di Brousseau alle tesi di Piaget è forte e ne critica le fondamenta; si veda per esempio Brousseau (1986b, p. 49); l'unica concessione che viene fatta a Piaget, relativamente all'apprendimento, è relativa alla idea di *assimilazione* e *accomodamento*, sulla quale torneremo in seguito.

Ben diversa è la posizione di Vygotskij sull'apprendimento, dato che questi riconosce l'importanza principale dell'apprendimento connessa all'interazione sociale fra i soggetti coinvolti, adulti-insegnanti e bambini: l'apprendimento è il prodotto di questa interazione (Vygotskij, 1966). Mediatore fra individuo e cultura è il linguaggio: la formazione di un concetto avviene con un'operazione intellettuale che è "guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti,

[4] Vale la pena qui fare riferimento a un altro grande paladino degli esordi della DdM, Gérard Vergnaud. La sua notevole statura scientifica è testimoniata dal fatto che il sottotitolo del testo (già citato) (Artigue, Gras, Laborde, & Tavignot, 1994) cita: "Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud", insieme. Vergnaud è stato allievo dottorale di Jean Piaget ma i suoi studi di ricerca se ne sono distanziati assai presto, avvicinandolo molto alle posizioni della DdM dei primordi. Si veda Vergnaud (1981), D'Amore (1999, specie le pagine 206–209) e D'Amore (2002a). Dunque, perfino un allievo diretto di Jean Piaget, affrontando veri problemi connessi con l'apprendimento della matematica, prende strade alternative.

sintetizzarli e simbolizzarli per mezzo di un segno" (Vygotskij, 1966, p. 106).

> L'organizzazione cognitiva del bambino riceve dunque, grazie al linguaggio, una dimensione che gli è propria, connaturata fin dal suo esordio: la dimensione sociale. Se è vero che il bambino impara a categorizzare nel rapporto linguistico con l'adulto, è però anche vero che forme embrionali di categorizzazione devono già essere presenti prima della sistemazione definitiva adulta di esse; Vygotskij stabilisce allora un confronto tra concetti spontanei o quotidiani e concetti "scientifici": i primi hanno la caratteristica di essere relativi all'esperienza personale, i secondi fanno già parte di un sistema di concetti. La scuola ha, come effetto sulle competenze del bambino, di dare una sistematicità ai concetti che egli già possiede e che man mano acquisisce. Una posizione davvero rivoluzionaria, quella sulla quale si fonda gran parte della didattica odierna. (D'Amore, 1999, p. 70)

Vediamo come Gardner (1993) illustra la posizione di Vygotskij a proposito dell'apprendimento dei concetti scientifici:

> Lo psicologo sovietico Lev Vygotskij ha contribuito a mettere a fuoco le speciali caratteristiche della scuola in sede di discussione delle differenze tra concetti "spontanei" da un lato e concetti "scientifici", "non spontanei" o "appresi in modo sistematico" dall'altro. I concetti spontanei (come fratello o animale) sono tratti dalla vita quotidiana, mentre i concetti scientifici (come gravità o mammifero) vengono appresi soprattutto in un ambiente scolastico. Le definizioni dei concetti scientifici, che pure sono spesso alquanto tecniche, si imparano più prontamente che non quelle dei concetti spontanei, e ciò per diverse ragioni. I concetti scientifici rappresentano lo specifico campo di azione della scuola; vengono insegnati verbalmente dai docenti; le loro definizioni hanno una nettezza che non è facile introdurre nei concetti spontanei; appartengono, infine, a un sistema di concetti di cui si possono esplorare le interrelazioni. Così, anche se le intuizioni del bambino al riguardo della famiglia sono piuttosto evolute, egli avrà vita più facile quando gli si chiede di definire il principio di Archimede che quando si troverà a spiegare che cos'è una famiglia. Senza dubbio Vygotskij ha ragione quando afferma che i bambini *sembrano* padroneggiare i concetti scientifici con maggiore sicurezza di quelli spontanei; eppure (…) la conoscenza scientifica spesso è alquanto fragile e viene facilmente sovrastata dai concetti spontanei in quanto più profondamente radicati nella mente. (Gardner, 1993, p. 145)

C'è da dire che, mentre negli anni '60-'80 gli studi di Piaget circolavano dovunque, dettando legge in tutta Europa, quelli di Vygotskij cominciavano pian piano ad apparire in lingue diverse dal russo, assai poco frequentato dagli studiosi dell'Europa occidentale e dagli statunitensi. Se questo materiale fosse stato disponibile al tempo della fondazione della TSD, forse alcuni punti salienti e basilari della TSD avrebbero potuto mutare, ma così non fu. I lavori originali di Vygotskij sono degli anni dal '30 al '60, ma apparvero in Europa solo ben oltre il 1960 (Vygotskij, 1966, 1974, 1978; Vygotskij & Lurija, 1987); uno studio formidabile in francese sullo psicologo russo è del 1985 (Bronckart & Schneuwly, 1985). Va anche ricordato che le traduzioni delle opere di Vygotskij in Europa Occidentale sono state oggetto di molte critiche.

L'articolo citato per ultimo nell'elenco degli scritti di Brousseau (1986b) e tradotto in almeno 4 lingue, per quanto ne sappiamo, è dunque decisamente il punto di partenza ufficiale della DdM e della TSD. Ma l'articolo (Brousseau & Pères, 1981) ebbe una rilevanza internazionale che desideriamo porre in evidenza. In esso si studia una reale situazione d'aula (interazioni multiple diacroniche fra docente-allievo-Sapere, come diremo meglio fra poco) sulla base dell'apprendimento (o, meglio, del mancato apprendimento) e si analizzano le cause dell'insuccesso sulla base di motivazioni strettamente inerenti a una teoria didattica, la TSD, o meglio, di alcune sue componenti che appena cominciavano a vedere la luce.

Dunque, le origini delle componenti teoriche della TSD sono il risultato di analisi di fatti reali studiati empiricamente in aula. Fin da allora, lo scopo di questa teoria era quello di evitare il mancato apprendimento, l'insuccesso apprenditivo, studiarne le cause e proporre attività concrete per rendere possibile, anzi più efficace, l'apprendimento. Ci sembra di poter sostenere che la base di questi studi è uno stretto empirismo e la costante analisi delle situazioni d'aula reali.

Soddisfatte le necessità cronologico-storiche, diciamo in sintesi quali sono le componenti della TSD sulle quali vogliamo porre l'attenzione principalmente:

- triangolo della didattica e trasposizione didattica, ingegneria didattica;
- contratto didattico, clausole, effetti;
- milieu;
- teoria degli ostacoli.

Si tratta di temi talmente noti, che li presenteremo ciascuno in poche parole, per evidenziare soprattutto quel che a noi preme di più, nel contesto di questo lavoro, e cioè di che cosa la TSD NON si occupa.

3.2. Componenti della TSD

1. Triangolo della didattica e trasposizione didattica, ingegneria didattica

Si chiama usualmente *triangolo della didattica* uno schema che presenta quelli che sono considerati i tre poli della situazione d'aula: Sapere, docente, allievo. Tale schema è talmente noto che ci limitiamo a suggerirne una presentazione superficiale (D'Amore, 1999, pp. 219–222) e un'analisi metodica assai più approfondita che tiene conto di tutti gli sviluppi teorici che si sono presentati a questo proposito fin dalla nascita di questa idea negli anni '80 (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002).

Per *trasposizione didattica* si intende il necessario passaggio professionale che il docente deve effettuare per trasformare il suo Sapere (colto, adulto, basato sulla disciplina intesa in senso universitario) e quel sapere che dovrà insegnare (sapere da insegnare) in aula, tenendo conto delle conoscenze e delle maturità dei propri allievi.

Alla coppia (Sapere, sapere da insegnare) fa logicamente seguito la coppia (sapere da insegnare, sapere insegnato) che tiene conto delle modalità scelte per l'insegnamento e dunque metodologie, strumenti eccetera; ciò porta di conseguenza l'idea di *ingegneria didattica* che, proposta inizialmente come uno studio empirico-teorico delle metodologie di insegnamento in vista però dell'apprendimento, ha finito con l'evolversi costituendo di per sé una teoria all'interno della TSD (si vedano: Artigue, 1988, 1992; Farfan Marques, 1997; Brousseau, 2008).

2. Contratto didattico, clausole, effetti

I temi che appaiono nel titolo sono di certo gli aspetti più noti di tutta la TSD, forse quelli così evidenti e convincenti che ne hanno decretato il trionfo su scala planetaria. Sono talmente noti che ci limitiamo solo a confermare molta bibliografia precedentemente fornita aggiungendo D'Amore, Fandino Pinilla, Marazzani e Sarrazy (2010).[5]

Facciamo solo notare che in nessuno di questi studi si propone un modello di *come* lo studente apprende ma uno studio teorico, basato su evidenze empiriche, di come l'insegnante può condurre la fase di insegnamento per evitare criticità che divengono poi insuperabili, come quelle descritte per primo da Brousseau e in seguito da tanti suoi seguaci.

Ci limitiamo a evidenziare un significativo studio di Sarrazy (1995, pp. 138–139 della trad. it.). A conferma dell'origine empirica di questo genere di ricerca, l'autore cita un esempio di risposta da parte di un allievo non sul contenuto della domanda da parte dell'insegnante, ma esplicitamente su quel che ritiene l'insegnante si aspetti da lui. La maestra propone a bambini (di 6–7 anni, prima primaria) di mettere in ordine crescente i numerali 38, 24, 49, 46, 51. Dopo che la soluzione corretta è stata scritta alla lavagna, la maestra chiede: «Perché è stato messo 46 e 49?» (lei intende dire: perché "prima" 46 e "poi" 49? È chiaro che intende stimolare l'attenzione sul fatto che, a parità di cifra delle decine, il numero delle unità 6 precede il 9). Ma l'allievo A risponde: «Perché altrimenti sarebbe troppo facile se ci fossero stati solo gli

[5] La data di questa ultima citazione serve a smorzare quelle banali critiche superficiali che affermano essere questi studi del passato, non più in grado di generare ricerca. Al contrario, sono attualmente vivi e vitali studi del tutto nuovi per quanto ancorati alle origini di questi temi, per esempio ricerche compiute in dottorati (come il DIE dell'Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá) nell'ambito del quale interessanti ricerche hanno portato a più pubblicazioni, fra le quali segnaliamo Narváez Ortis (2017), solo per fare un esempio. Un'analisi delle posizioni di chi afferma essere la TSD una teoria antiquata e superata, mostra la scarsa consapevolezza riguardo alla vera portata di tali teorie di base e diventa dunque indice di importanti lacune culturali; si veda D'Amore e Fandiño Pinilla (2013).

altri». A non risponde a tono, nel tono auspicato dalla maestra, ma cerca di interpretare la consegna iniziale, mettendosi nei panni della maestra: perché ha inventato quella situazione? La maestra replica: «Non è questo che ti chiedo … [E, rivolgendosi a tutta la classe] Allora?». Risponde B: «Perché 46 è più piccolo di 49», al che la maestra risponde: «Bene!».

Situazioni di questo tipo sono molto presenti in letteratura e nella pratica scolastica: lo studente supera la domanda diretta, la cui risposta considera troppo ovvia, e dà la scalata alle intenzioni didattiche dell'insegnante.

3. *Milieu*

Si tratta di uno dei termini più controversi e dibattuti dell'intera TSD, tanto che difficilmente, pur nelle molteplici traduzioni, i traduttori osano sostituire questo termine francese con un altro della loro lingua …

Per Brousseau il *milieu* è lo strumento attraverso il quale il docente comunica (in senso complesso, attraverso molteplici codici e registri, non solo oralmente) con lo studente ed è costituito da oggetti fisici, culturali, sociali, umani, con i quali il soggetto interagisce in una situazione; esso ha due aspetti: quello sincronico della relazione tra apprendimento-insegnamento e quello diacronico legato per esempio allo svolgersi delle successioni delle azioni da parte dei componenti umani del triangolo della didattica nell'ambiente aula.

Accomodare l'ambiente per far sì che l'apprendimento, qualsiasi cosa esso sia, avvenga è la funzione della relazione tra Sapere, docente e allievo. Si noti che molti degli elementi fisici, reali o culturali, sociali, sono quelli che altri chiamano "artefatti" (Radford, 2008).

4. *Teoria degli ostacoli (TOst)*

All'interno della TSD si pongono dunque spesso, come abbiamo visto, le seguenti domande: Perché lo studente non costruisce conoscenza, perché non apprende? Che tipologie di ostacoli si frappongono al raggiungimento dell'apprendimento? È ben noto che fin dagli anni '80 Brousseau dedicò parte dei suoi sforzi a questo studio analitico-classificatorio (che altro non volle essere e non è) basato sulla evidenza empirica e in gran parte su questioni di carattere assai più generale. (Una fondazione teorica è, per esempio, Bachelard, 1938; una presentazione piuttosto riassunta di questo tema si trova in D'Amore, 1999, pp. 209–218; D'Amore & Sbaragli, 2011, pp. 72–76; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2008, pp. 41–56).

Dalla natura dell'evidenza empirica, allo studio che teorizza: questo è l'ambiente nel quale si sviluppa questo aspetto specifico della TOst all'interno della TSD. Dunque, un contrasto evidentemente esistente fra le interpretazioni del termine "ostacolo" nelle diverse teorie oggi esistenti in DdM non può darsi, a meno che non si attribuisca alla TOst di Brousseau una componente sociale o storico-sociale che essa non ha. Su questo dibattito, si veda l'articolo di D'Amore, Radford e Bagni (2006), nel quale si affronta un dibattito teorico su due possibili interpretazioni della TOst nel caso degli ostacoli epistemologici, una strettamente inerente-interna alla TSD e l'altra di natura sociale-storica interna alla TO.

Ora, per spiegare esattamente l'attività concreta, ma in chiave interpretativo-metaforica di quel che accade in aula, il che sarà assai utile fra breve, cominciamo da queste frasi emblematiche di Brousseau (Brousseau, 1995):

> Si tratta sempre di sapere a che gioco deve giocare l'allievo affinché le strategie più efficaci implichino l'uso del sapere che gli si vuol insegnare. Il gioco gli deve anche poter essere spiegato e, perché capisca, occorre, in generale, che egli possa immediatamente mettere in atto una strategia "di base" che, anche se non fa vincere, permette di giocare e di sperare di vincere. (Brousseau, 1995, p. 23)

Da essa si evince che l'allievo è un soggetto attivo nella sua azione di apprendere e costruire conoscenza, non passivo …

E ci piace notare quale frase scelga l'autore per dare un'idea di quel che succede in aula:

> *Non vi spiego tutto, per non privarvi del piacere di apprenderlo da soli.*
>
> René Descartes

3.3. Il senso della TSD: le "situazioni"

Entriamo ora in modo più approfondito nel nostro tema, cercando di delineare il senso della TSD, traendolo da Brousseau (1986b):

> L'allievo apprende adattandosi ad un ambiente che è fattore di contraddizioni, di difficoltà, di disequilibri, un po' come la società umana. Questo sapere, frutto dell'adattamento dell'allievo, si manifesta con delle nuove risposte che sono la prova dell'apprendimento (...). [L'allievo sa che] (...) il problema è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza ma deve sapere anche che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che può costruirla senza far appello a delle ragioni didattiche. (Brousseau, 1986b, pp. 48–49)

Una tale situazione è definita *a-didattica*: sono in ballo gli studenti e l'oggetto della conoscenza, ma non direttamente l'insegnante (in questa particolare occasione). La situazione suggerisce delle esigenze, delle necessità, delle alternative e gli allievi danno risposte a queste. Non ci sono obblighi didattici espliciti o resi palesi, e dunque quel che si fa non è legato a spinte da parte dell'insegnante. L'allievo fa (da solo o in gruppo) dei tentativi, verifica che i tentativi falliscono o sono inefficaci; si deve rifare più volte la prova; interagendo con gli elementi dell'ambiente, l'allievo modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che deve fare nell'utilizzare varie strategie. Sono i casi in cui, per esempio, al termine di un'attività ludica, si deve effettuare qualche cosa di pertinente alla matematica allo scopo di concludere l'attività (per esempio, nel caso di bambini piccoli, conteggi per stabilire il vincitore, paragone di valori, paragone di misure, o altro). La richiesta di effettuare quell'attività matematica non è stata proposta dall'insegnante, non sarebbe necessaria dal punto di vista scolastico (non c'è interazione con il sapere da insegnare). È invece un bisogno motivato dall'attività stessa, dalla sua specificità. Se tale attività pertinente alla matematica non riesce al primo colpo e provoca nello studente o tra gli studenti una discussione per accordarsi su modalità, allora si ha produzione di conoscenza, ma non richiesta dall'insegnante, non istituzionalizzata. È un adattamento all'ambiente, alle attese compartite, l'acquisizione di una modalità speciale di condivisione.

Questa situazione è proposta nella TSD come la più consona alla costruzione di conoscenza, anche se mai si tenta una spiegazione o un'ipotesi su come avvenga l'apprendimento, non è questo il suo scopo.

Non-didattica, invece, è una situazione non specifica di un sapere: insegnante e allievo non hanno in quel frangente specifico un rapporto significativo e tipico con il sapere in gioco. Per esempio, i bambini in aula, alla presenza dell'insegnante, giocano con i pezzi di un gioco matematico (per esempio fanno delle costruzioni utilizzando come pezzi i blocchi logici di Dienes). Le strategie realizzate, pur se con strumenti "matematici", non sono specifiche per obiettivi cognitivi scolastici.

Non è detto tuttavia che lo studente non impari qualcosa: è solo che l'insegnante non ha costruito un "ambiente didattico" finalizzato all'apprendimento di qualche nozione specifica del sapere da insegnare. Non c'è un tentativo di adattamento ad un ambiente appositamente costruito.

Resta da definire che cosa sia allora una situazione *didattica*; Brousseau (1986b) propone come modello quello del gioco nel quale l'insegnante cerca di

> far devolvere all'allievo una situazione a-didattica che renda l'interazione [tra allievo e problema scelto dall'insegnante] la più indipendente [dall'insegnante] e la più feconda possibile. Per questo comunica o si astiene dal comunicare, secondo il caso, informazioni, domande, metodi di apprendimento, euristiche ecc. L'insegnante è dunque implicato in un gioco con il sistema di interazioni dell'allievo con i problemi che egli pone. (Brousseau, 1986b, p. 50)

È l'insegnante che ha strutturato l'ambiente in modo opportuno, con strumenti opportuni, al fine di giungere alla fine dell'attività a una conoscenza specifica. Tutto avviene, per così dire, alla luce del sole, in un ambiente dichiarato:

- l'allievo sa che sta imparando, che l'insegnante sta insegnando;
- l'insegnante è consapevole del suo ruolo e di come la situazione si sta sviluppando.

C'è *intenzione esplicita di insegnare*. Sono situazioni di stimolo concreto a fare svolgere attività, a risolvere problemi, a eseguire consegne. La situazione è tutta esplicita: l'allievo sa che in quel momento si stanno delineando ed evolvendo nozioni che fanno parte del sapere atteso dalla società, deciso dall'ambiente scolastico.

Siamo, ovviamente, in pieno contratto didattico: è tutto così esplicito che spesso l'allievo, giunto al momento di dover dare risposte, non si pone domande sul contenuto, ma su che cosa l'insegnante si aspetta che egli faccia o risponda ... (come abbiamo già visto in Sarrazy, 1995). E poi, non solo ai bassi livelli di scolarità, ogni gesto, ogni cenno, ogni ammiccamento, ogni minimo passo è accompagnato dalla ricerca del consenso. Il contratto didattico a volte è regola, a volte è strategia ... e dunque ben si adatta alla "metafora del gioco", continuamente richiamata da tutti gli autori.

È qui che, a nostro avviso, sì inserisce il tema dello "scivolamento metadidattico":

> I docenti spiegano, poi spiegano le spiegazioni, le illustrano e poi spiegano le illustrazioni … Ogni volta i tentativi per correggere gli insuccessi iniziali si rivelano inadeguati. Il fenomeno si amplifica, inoltre, quando lo si sottomette al giudizio del pubblico, ancora più ignorante in didattica. Il fenomeno si radicalizza e rapidamente diventa incontrollabile. È che così, come nelle grandi pandemie del Medioevo, alcuni ne approfittano per accusare ogni tipo di pratiche scolastiche che pretendono di rinnovare, mutilandole, per gettare al fuoco qualche "teoria" e per dimenticare i risultati delle esperienze considerate negative. [Traduzione nostra] (Brousseau & D'Amore, 2018, p. 45)

Ricordiamo per esempio il tentativo di introdurre la teoria ingenua degli insiemi (denominata insiemistica) sotto il nome di "matematica moderna" negli anni '70-'80; si spiega la logica di questi costrutti, poi si fanno grafici, poi si studiano i grafici, poi si studiano le modalità per eseguire i grafici … passando dalla teoria ingenua degli insiemi alla tecnica per realizzare grafici, spesso facendo esempi strampalati fuorvianti lontanissimi da ogni senso matematico. Oppure: si vogliono studiare le proporzioni nelle quali appare un termine incognito a:x=c:d, dove a, c, d sono valori dati (4 operai fanno un certo lavoro in 6 giorni; quanti operai sono necessari per farlo in 2?). Si propone uno schema risolutivo con frecce che vanno e vengono; poi si studia lo schema; poi si studia il modo di disporre le frecce … Resta ben poco del problema iniziale e della sua logica, e ci si riduce a meccanismi che nessuno capisce più.

La TSD studia dunque l'evoluzione delle situazioni in aula e cerca di trovarne spiegazioni il più possibile legate a relazioni umane o sociali (D'Amore, 2005, 2008; Bagni & D'Amore, 2005).

L'ambito che più interessa è la situazione scolastica, ma quella concreta che si svolge dentro l'aula. È allora ovvia l'estrema importanza che è assunta dalla situazione concreta e in particolare dalle modalità con le quali l'insegnante è in grado di organizzare e gestire tale situazione. Negli ultimi anni, i ricercatori in DdM hanno riconosciuto grande importanza agli studi di psicologia dell'educazione su temi come: situazioni, gestione delle situazioni, contesto, cultura, comportamenti cognitivi degli allievi (Balacheff, 1990). Si tratta di una, diciamo così, dimensione sociale che fa da sfondo a qualsiasi studio sui processi di insegnamento. Si tratta di studi anche contemporanei che sono coltivati da diversi punti di vista anche in modo attuale (Bohórquez & D'Amore, 2018).

Tenuto conto di tutto ciò, la TSD è vista da taluni autori anche come un'iniziativa che va verso una direzione sociale (Godino, 1991):

> Una situazione didattica è un insieme di relazioni esplicitamente e/o implicitamente stabilite tra un allievo o un gruppo di allievi, qualche elemento del contorno (inclusi strumenti o materiali) e l'insegnante al fine di permettere agli allievi di apprendere – cioè: ricostruire – qualche conoscenza. Le situazioni sono specifiche di tali conoscenze. (Godino, 1991, p. 266 della trad. it.)

Ricordiamo che Brousseau asserisce che l'allievo costruisce la conoscenza solo se si interessa *personalmente* del problema della risoluzione di quanto gli è stato proposto attraverso la situazione didattica: in tal caso si usa dire che si è raggiunta la *devoluzione* da parte dell'allievo. (Su questi termini torneremo tra poco).

È qui che scatta, a nostro avviso, l'interessante metafora del gioco di strategia; esistono varie strategie, ma così come nel gioco solo alcune di esse portano alla vittoria, solo alcune portano alla scoperta della risoluzione del problema e dunque alla costruzione della conoscenza, da parte dell'allievo. Così come nel gioco c'è una posta da vincere, nella situazione c'è come posta la *conoscenza*.

L'apprendimento si produce attraverso la soluzione di problemi; è per ciò che si dice spesso che la TSD è di stampo costruttivista. Ma sappiamo già che così non è, si tratta di un fraintendimento, tanto è vero che lo stesso Brousseau più volte ha criticato il costruttivismo dicendo che esso è formalmente impossibile. In Brousseau (1997) si legge:

> Inizialmente, pensavamo implicitamente che le situazioni di apprendimento fossero quasi l'unico mezzo attraverso il quale la conoscenza viene trasmessa agli studenti. Questa idea nasce da una concezione epistemologica piuttosto sospetta, come idea empirista della costruzione della conoscenza: lo studente, posto in una situazione ben scelta, dovrebbe, a contatto con un certo tipo di realtà, costruire per sé una conoscenza identica alla conoscenza umana del suo tempo (!). Questa realtà può essere una realtà materiale in una situazione di azione o una realtà sociale in una situazione di comunicazione o di prova. Sappiamo molto bene che è l'insegnante a scegliere le situazioni perché mira a un determinato segmento di conoscenza, ma può esso coincidere con il significato "comune"? Lo studente ha "costruito un significato", ma è istituzionalizzabile? Si potrebbe procedere a un'istituzionalizzazione delle conoscenze, ma non a quella del significato. (…) C'è l'idea che la conoscenza possa essere insegnata ma che la comprensione è nelle mani dello studente. Si può insegnare l'algoritmo e "bravi insegnanti" possono allora cercare di dargli un significato. Questa differenza tra forma e

> significato si traduce in difficoltà non solo nel concepire una tecnica per insegnare il significato, ma anche nel concepire un *contratto didattico* per questo scopo. In altre parole, non è possibile chiedere agli insegnanti di utilizzare una situazione di azione, di formulazione, di prova, se non si riesce a trovare un modo per consentire loro di negoziare il contratto didattico connesso a questa attività; vale a dire, se non si può negoziare questa attività di insegnamento in termini utilizzabili. (Brousseau, 1997, p. 237)

Come si vede, una posizione assai distante da quella del generico costruttivismo e ancor più da quello cosiddetto “radicale”.

Inoltre, cruciale è ovviamente il ruolo del risolutore-giocatore specie nel suo ruolo di attore in una situazione sociale, come abbiamo visto.

TSD ha la matematica e solo la matematica come riferimento e dunque, quando si parla di conoscenza, è sempre sottinteso che si sta parlando di conoscenza matematica; ora, come sua caratteristica, la conoscenza matematica include sì concetti ma anche sistemi di rappresentazione simbolica, processi di sviluppo e validazione di nuove idee (a mo’ di esempio, un’apertura di interessi della TSD nel solco tracciato da Raymond Duval nelle relazioni fra *noesis* e *semiosis* si trova in D’Amore, 2003, pp. 44–61) (Duval, 1993, 1995, 1996).

Ecco perché in TSD si fa riferimento non a una situazione generica, ma a vari tipi di esse.

> Poiché la conoscenza matematica, nella sua peculiarità, include non solo concetti ma anche sistemi di rappresentazione simbolica, non solo processi di sviluppo ma anche validazioni di nuove idee matematiche, dobbiamo contemplare vari *tipi* di situazioni:
>
> - *situazioni di azione*: agiscono sull’ambiente e favoriscono il sorgere di teorie implicite che funzioneranno nella classe come modelli protomatematici;
> - *situazioni di formulazione*: favoriscono l’acquisizione di modelli e linguaggi espliciti; se esse hanno dimensione sociale esplicita, si parla allora di situazioni di comunicazione;
> - *situazioni di validazione*: agli allievi sono richieste prove e dunque spiegazioni sulle teorie utilizzate ed anche esplicitazione dei mezzi che soggiacciono nei processi dimostrativi;
> - *situazioni di istituzionalizzazione*: hanno lo scopo (come abbiamo visto) di stabilire e dare uno status ufficiale a conoscenze apparse durante l’attività in aula. Normalmente hanno relazione con conoscenze, simboli eccetera, che si devono ritenere in vista della loro utilizzazione in un lavoro successivo.
>
> Ma apprendere per adattamento all’ambiente comporta rotture cognitive, accomodamento, modifica di modelli impliciti, linguaggi, sistemi cognitivi. È anche per questo che si è rivelato controproducente obbligare l’allievo ad una progressione cognitiva passo dopo passo; il principio di adattamento può contrastare il processo di rifiuto di una conoscenza inadeguata che è invece necessario all’apprendimento. Idee che sappiamo essere transitorie, in attesa di

> una loro sistemazione, resistono per così dire agli “attacchi” e dunque persistono anche quando dovrebbero essere superate. Queste rotture sono così necessarie da dover essere addirittura previste dallo studio delle situazioni e indirettamente dai comportamenti degli allievi. (D’Amore, 1999, pp. 81–82)

Ma, nella fase di devoluzione, nel rapporto di insegnamento, in quel momento cioè in cui l’insegnante affida allo studente, in situazione a-didattica il compito di apprendere agendo concretamente per risolvere un problema dato, si viene a creare un *paradosso* che rientra tra gli aspetti relativi al contratto didattico:

> Se l’insegnante dice ciò che vuole, non può ottenerlo; (...) se [l’allievo] accetta che, secondo il contratto, l’insegnante gli insegni i risultati, non li stabilisce lui stesso e dunque non apprende la matematica, non se ne appropria. Se, al contrario, rifiuta ogni informazione da parte dell’insegnante, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere, implica, per lui, che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e si sforzi di rigettarla. (Brousseau, 1986a, p. 316)

Oppure: “Più il professore (...) svela ciò che desidera, più dice all’allievo precisamente ciò che deve fare e più rischia di perdere le possibilità di ottenere e di constatare oggettivamente l’apprendimento al quale, in realtà, deve mirare” (Brousseau, 1986a, p. 316).

> Questo “paradosso” *della devoluzione* fa il paio con il “paradosso” *della credenza*: “Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos’è sapere (…) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione”. (Clanché, 1994, p. 224)

Scrive Sarrazy (1995):

> Questo sistema di paradossi sembra funzionare come una trappola nella quale cadrebbero alcuni allievi – quelli che, come ad esempio Gaël (vedi *supra*), dubitano della pertinenza di far uso *hic et nunc* del loro proprio intendimento. Così pure, per imparare, l’allievo deve sublimare il disagio delle incertezze legate all’incompletezza del suo sapere, accettando di rischiare nella ricerca dei mezzi utili per questa padronanza. Questo rischio è al tempo stesso il fondamento e la condizione del funzionamento del processo di insegnamento-apprendimento. (Sarrazy, 1995, p. 146 della trad. it.)

Questa idea dell’apprendimento come rischio personale, come impegno, come implicazione diretta dell’allievo nell’apprendimento, come risultato vincente di un gioco, è un po’ il cardine attorno al quale ruota tutta l’impostazione che stiamo cercando di descrivere, e che si manifesta con la rottura (voluta) del contratto.

La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: *Credimi*, dice il maestro all’allievo, *osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai* (Sarrazy, 1995, p. 147 della trad. it.).

Queste idee che nascono dalla TSD e specialmente dalla devoluzione costituiscono motivo di grande interesse, come dicevamo, non solo in Francia

(Bessot, 1994), ma un po' in tutto il mondo.

Per approfondire ulteriormente, suggeriamo la lettura di Brun e Conne (1990), specie alle pagine 262–269 (interessanti gli esempi concreti); di Grenier (1996), specie la III parte, dove si fa un'analisi concreta di una specifica situazione didattica; di Perrin-Glorian (1994), specie a causa del fatto che vi si traccia una vera e propria storia della teoria, la sua nascita, il suo sviluppo, le sue prospettive.

Insistiamo ancora una volta sul fatto che la base di ogni affermazione della TSD è fondata su prove empiriche; ricordiamo che nel 1965 Brousseau crea a Bordeaux un centro di ricerca sull'insegnamento delle Matematiche (CREM) e, nella stessa città, prende parte attivamente alla preparazione e alla realizzazione dell'IREM nel 1969. Nel 1972 crea il COREM ossia il Centro per l'osservazione e la ricerca sull'insegnamento della Matematica costituito da una scuola dell'infanzia e una scuola elementare. Insomma, l'attività empirica in aula è notevole.

Insistiamo nel dire che l'idea di *situazione* è complessa dal punto di vista teorico e non si riduce a quelle poche banalità che a volte si leggono, scritte in modo superficiale.

Rispondendo alla domanda su che cosa sia a suo avviso la DdM, Brousseau (1986b, p. 35) afferma che essa studia i "fenomeni legati all'attività di insegnamento, concernenti specificatamente il sapere insegnato" (naturalmente si riferisce all'azione dell'insegnante allo scopo di ottenere apprendimento, non all'azione dell'insegnare in sé); lo stesso Brousseau mette in evidenza il ruolo formidabile e determinante delle *situazioni* nell'apprendimento della matematica e pone così davvero le basi teoriche della TSD, specifica per la Matematica. In più occasioni, Brousseau sostiene che oltre agli attori principali di un'azione didattica, l'insegnante e l'alunno, bisogna tener presente un terzo fattore, ossia "l'attore silenzioso", la situazione nella quale evolvono le azioni dell'insegnante e degli alunni, l'ambiente sociale (Brousseau, 1986b, p. 49): "Una situazione è caratterizzata in una istituzione da un insieme di relazioni e di ruoli reciproci di uno o più soggetti (allievo, docente ecc.) con un milieu, che guardano la trasformazione di questo milieu secondo un progetto". [Traduzione nostra].

Nella TSD Brousseau individua a questo punto le tre situazioni che abbiamo chiamato *a-didattica*, *non-didattica*, *didattica*, che abbiamo già esaminato e che danno luogo e senso all'idea di *contratto didattico* per spiegare come in una situazione didattica l'accesso a un compito da parte dell'alunno avvenga mediante "un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti"; il *contratto didattico* è costituito quindi dalle "abitudini specifiche del maestro attese dall'allievo" e dai "comportamenti dell'allievo attesi dal docente" e proprio la scelta del comportamento da tenere, da parte dell'alunno, diventa problematica poiché porta il soggetto ad interrogarsi su “cosa l’insegnante si aspetti che faccia” (Brousseau, 1986b, p. 66).

Il contratto didattico influenza l’idea che gli alunni possiedono riguardo la scuola e la matematica: la prima viene vista come un’istituzione direttiva e valutativa che non rende liberi gli alunni di esprimere le loro opinioni, la seconda è percepita come una disciplina nella quale si devono svolgere sempre dei calcoli; i problemi che vengono forniti dall’insegnante devono poter venire sempre risolti (*Età del capitano*; IREM Grenoble, 1980), cioè non sono impossibili; i dati numerici presenti nel testo del problema devono venire utilizzati, una e una sola volta.

Si capisce bene che il fulcro di tutta la TSD consiste nell’idea del tutto nuova di *situazione a-didattica*: in essa sono in ballo gli studenti e l’oggetto della conoscenza, ma non l’insegnante. La situazione suggerisce delle esigenze e gli allievi danno risposte a queste. Non ci sono obblighi didattici, dunque quel che si fa non è legato a spinte da parte dell’insegnante che in questo caso non interviene ma “gioca” solo un ruolo da “regista”. Detto in altro modo, gli allievi partecipano a qualcosa che non è esplicitamente cognitivo; solo l’insegnante è consapevole, ma non dichiara lo scopo dell’attività. Si tratta quindi di un modello teorico che si realizza quando in un ambiente organizzato per l’apprendimento di un certo argomento viene a cadere l’intenzione didattica esplicita e condivisa.

L’allievo fa (da solo o in gruppo) dei tentativi, verifica che tali tentativi falliscono o sono inefficaci; se deve rifare più volte la prova, interagendo con gli elementi dell’ambiente, l’allievo modifica il suo sistema di conoscenze a causa degli adattamenti che assume nell’utilizzare varie strategie. Ossia, la richiesta di effettuare quell’attività matematica non è stata proposta dall’insegnante, non sarebbe necessaria dal punto di vista scolastico (non c’è interazione con il sapere da insegnare). È invece un bisogno motivato dall’attività.

Questa situazione sembra essere la più consona alla costruzione di conoscenza. Brousseau (1986b) in effetti sostiene che l’allievo *costruisce* la conoscenza solo interagendo dialetticamente con un problema o *milieu* a-didattico, cioè privato di specifiche intenzioni o presupposizioni didattiche, e adattandosi a tale situazione nella risoluzione di quanto gli è stato proposto:

> La situazione a-didattica finale di riferimento, quella che caratterizza il sapere, può essere studiata in modo teorico, ma nella situazione didattica, per il maestro come per l’allievo, vi è come una sorta di ideale verso il quale si cerca di convergere: l’insegnante deve sempre aiutare l’allievo a spogliare il più possibile la situazione di tutti i suoi artifici didattici, per lasciargli una conoscenza personale ed obiettiva. (Brousseau, 1986b, p. 50)

Nelle *situazioni a-didattiche* si possono pertanto delineare sei importanti fasi attraverso le quali insegnante e allievi permettono che si snodi e prenda forma l’azione didattica e si giunga ad una nuova conoscenza.

1. *Devoluzione*: è un atto che compie *l’insegnante nei confronti degli allievi: egli consegna l’obiettivo cognitivo agli studenti.* È il processo o l’attività di responsabilizzazione attraverso il quale l’insegnante ottiene che lo studente impegni la sua personale responsabilità nella risoluzione di un problema, o in generale di un’attività cognitiva, che diventa allora problema dell’allievo, accettando le conseguenze di questo trasferimento momentaneo di responsabilità, in particolare per quanto concerne l’incertezza che questa assunzione genera nella situazione.

In origine Brousseau (1986b, p. 55) definisce la devoluzione come “l’atto attraverso il quale l’insegnante fa accettare all’allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer”.

La devoluzione è dunque una componente della situazione a-didattica nell’ambito della quale l’allievo “funziona” in modo scientifico, e non solo in risposta a spinte esterne alla situazione, per esempio di tipo didattico.

Vi sono vari ostacoli alla realizzazione della devoluzione, ostacoli che Perrin-Glorian (1997) sintetizza in questi termini:

- mancanza di stabilità delle conoscenze previe, sia per quanto concerne la loro utilizzazione sia per la capacità di un’eventuale loro messa in discussione;
- mancanza di affidabilità delle tecniche operatorie, il che comporta un distoglimento dell’attenzione dall’obiettivo principale e un alto costo per le procedure complesse;
- mancanza della capacità della lettura globale della richiesta del problema; la si sostituisce spesso con una lettura selettiva, locale, allo scopo di dare risposte pronte.

Anche D’Amore ha dato delle spiegazioni (diverse) al fallimento della devoluzione, sulla base delle sue esperienze di ricerca (D’Amore, 2002b).

2. *Implicazione*: è la fase nella quale lo studente accetta l’“offerta” dell’insegnante e si implica nell’attività proposta, cioè accetta la responsabilità di occuparsi personalmente del problema/dell’attività proposto/a, senza la guida continua dell’insegnante.

3. *Costruzione di conoscenza personale*: fase in cui ciascuno studente crea una propria conoscenza interna singolare, la quale dovrà poi essere tradotta e riorganizzata nel momento in cui diventa modello esterno, cioè comunicata ad altri.

4. *Validazione:* processo di grande rilevanza che si adotta e si segue per raggiungere la convinzione che un certo risultato ottenuto (o un’idea costruita da singoli allievi) risponda davvero ai requisiti esplicitamente messi in campo. La validazione si ha quando un allievo, dopo aver proposto una propria costruzione concettuale agli altri, o una propria risposta al problema che si sta

risolvendo, accetta l'invito dell'insegnante-regista a difendere la propria personale costruzione di conoscenza, mettendosi in situazione esplicitamente comunicativa allo scopo di spiegare ai compagni la propria idea; più o meno consapevolmente, egli dirige così la sua attenzione alla trasformazione di un sapere personale in un prodotto di comunicazione, validando appunto la propria costruzione. In didattica della matematica questa fase è di straordinaria importanza: senza di essa l'apprendimento matematico non funziona.

5. *Socializzazione*: il sapere personale costruito e validato da un singolo studente viene presentato, discusso, "patteggiato" con gli altri, entra cioè a far parte del patrimonio comune, acquisito e condiviso dall'intera classe. Avviene dunque uno scambio sociale tra gli allievi, cosicché singole conoscenze personali diventano conoscenza sociale condivisa dalla classe. Quando si è raggiunta la consapevolezza che la classe ha risolto il problema iniziale, o effettuato l'attività, o costruito nuova conoscenza, manca ancora un momento fondamentale; tutti gli allievi volgono l'attenzione all'insegnante che, fino a quel momento, a mo' di regista, ha diretto la scena, ma che deve riprendere il suo ruolo per accettare o smentire il traguardo raggiunto.

Vogliamo qui far notare come la socializzazione sia una fase di grande valenza culturale, uno scambio fra pari di valori culturali personali, di credenze personali, di diversi modi di accedere e di aver accesso alla cultura sociale di riferimento. Si tratta di patteggiare opinioni personali costruite in un ambiente sociale condiviso.

È così giunto il momento della:

6. *Istituzionalizzazione delle conoscenze*: atto esplicito che compie l'insegnante al fine di permettere ad una conoscenza costruita dagli allievi, e socialmente condivisa, di essere ufficialmente riconosciuta. Rappresenta quindi quel processo attraverso il quale gli studenti devono cambiare statuto alle loro conoscenze non ancora ufficiali, non ancora patrimonio definitivo, quello utilizzabile ufficialmente per esempio per la risoluzione di problemi o preteso dall'insegnante come sapere posseduto in modo ufficiale. È un momento importante nell'apprendimento e quindi deve essere un atto forte. Lo studente tende a non accettare le costruzioni cognitive proprie o della classe, mentre tende ad accettare quelle dell'insegnante. L'insegnante cessa di essere regista e torna ad assumere il ruolo istituzionale che lo studente gli riconosce; questo processo risulta essere quindi complementare alla devoluzione.

3.4. La prospettiva sociale della TSD

La TSD ha al suo attivo quasi mezzo secolo di studi teorici dal momento della sua chiara formulazione in termini scientifici. Per gli scopi di questo lavoro, ci siamo limitati a una presentazione sommaria, ma gli studi al riguardo sono molteplici e alcuni notevolmente profondi (Margolinas, 1993, 1998; Laborde 1989; Schubauer-Leoni, 1986, 1988a, 1988b; solo per fare alcuni esempi).

Per gli scopi futuri di questo lavoro, segnaliamo gli aspetti sociali, di lavoro comune, di scambio di interpretazioni del valore sociale, di intenso lavoro condiviso fra i diversi attori della minisocietà nella quale si chiama in causa la costruzione di apprendimento. Sono tutti temi sui quali dovremo puntare la nostra attenzione.

4. Il problema del confronto fra teorie in didattica della matematica: Cosa vuol dire che due teorie non sono incompatibili?

Le teorie in didattica della matematica sono numerose e la loro diversità è una questione fortemente dibattuta a livello internazionale (si veda per esempio: Teppo, 1998; Lerman, 2006; Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Sriraman & English, 2010; Prediger, Bosch, Kidron, Monaghan, & Sensevy, 2010; Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014).

In Bikner-Ahsbahs et al. (2014), per esempio, l'esistenza di numerose teorie o approcci teorici in didattica della matematica è associata a diversi fattori, in particolare:

- al fatto che le teorie si siano evolute indipendentemente in diverse regioni del mondo e in circostanze culturali differenti (Sriraman & English, 2005);
- alla complessità del fenomeno di insegnamento-apprendimento della matematica, che non può essere descritto, compreso o spiegato da un'unica teoria (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010);
- ai "diversi modi di conoscere" (Teppo, 1998) che caratterizzano i vari paradigmi di ricerca in didattica della matematica;
- al carattere dinamico delle teorie.

In ogni caso, per Radford (2017b): "La comprensione dei fenomeni oggetto di indagine può essere raggiunta solo sullo sfondo di principi generali; tali principi possono essere astratti in senso aristotelico o principi induttivi in senso baconiano, ma possono essere anche qualcos'altro" (p. 220). Una teoria, dunque, include necessariamente dei principi, o meglio, un sistema di principi (P) concettualmente organizzati, ma non solo. Essa include anche, come afferma Radford (2008c), modelli di domande di ricerca (D) e una metodologia (M). Il sistema di principi P include i costrutti chiave sui quali i principi si fondano. La metodologia M include le tecniche di raccolta, analisi e interpretazione dei dati, fatti o evidenze empiriche che supportano le risposte alle domande di ricerca D. Le tre componenti (P, D, M) di una teoria T sono tra loro in relazione dialettica, si modificano o cambiano in relazione ai risultati che la teoria produce; in altre parole, ogni teoria evolve nel tempo.

In particolare, i principi generali della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986b, 1997) e quelli della teoria dell'oggettivazione (Radford, 2002, 2006, 2013, 2014b) permettono di evidenziare le somiglianze e le differenze fra i due approcci teorici sui quali si focalizza il presente lavoro. Sulla base di quanto riportato in Brousseau (1997), Radford (2008d, 2011), Bikner-Ahsbahs e Prediger (2014), D'Amore e Radford (2017b), tra i principi di tali teorie si possono identificare i seguenti.

Principi della teoria delle situazioni didattiche (di natura cognitiva)

P1. Una *situazione*, ovvero "l'insieme delle circostanze in cui si trova lo studente, le relazioni che lo uniscono al suo *milieu*, l'insieme dei 'dati' che caratterizzano un'azione o un'evoluzione" (Brousseau, 1997, p. 214), costituisce una *situazione problematica* quando necessita di un adattamento, una risposta, da parte dello studente. In particolare, una *situazione didattica* è "una situazione nella quale c'è una manifestazione diretta o indiretta della volontà di insegnare – un insegnante. In generale, in una *situazione didattica* si può identificare almeno una situazione problematica e un contratto didattico" (p. 214). Una situazione *a-didattica* (*liberata* dalla esplicitazione della sua intenzionalità *didattica*) è invece una situazione nella quale l'insegnante "ha nascosto con successo la sua volontà e il suo intervento in quanto fattori determinanti di ciò che lo studente deve fare" (p. 236); in altre parole, si tratta di una situazione nella quale l'insegnante si astiene dal suggerire ciò che vuole ottenere dallo studente, la conoscenza matematica che intende far emergere dalla situazione problematica in questione, per rendere possibile l'adattamento dello studente a tale situazione.

P2. Più l'insegnante esplicita chiaramente ciò che vuole, più dice all'allievo esattamente ciò che deve dire o fare, e più impedisce all'allievo di arrivare a un'effettiva comprensione e quindi a un apprendimento significativo. Si tratta del paradosso della *devoluzione* (Brousseau, 1986b). La *devoluzione* è "l'atto con cui l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione (a-didattica) di apprendimento o di un problema, e accetta le conseguenze del trasferimento di questa responsabilità" (Brousseau, 1997, p. 230). Accanto alla *situazione di devoluzione*, nella quale l'insegnante ottiene che l'allievo accetti la sfida di impegnarsi personalmente in una situazione problematica, assumendosi la responsabilità della sua risoluzione, vi è la *situazione di istituzionalizzazione*, nella quale l'insegnante identifica, riconosce e organizza le conoscenze che emergono dalla situazione problematica proposta, collegandole alle conoscenze matematiche condivise o accettate a livello istituzionale.

P3. La conoscenza è la risposta "ottimale" a una data situazione problematica. Per ottenerla, "L'insegnante deve sempre aiutare lo studente a spogliare la situazione di tutti i suoi artifici didattici il più rapidamente possibile in modo da lasciarlo con una conoscenza personale e obiettiva" (Brousseau, 1997, p. 31).

P4. L'apprendimento è una forma di adattamento cognitivo a una situazione problematica. La costruzione di significato "implica un'interazione costante tra lo studente e le situazioni problematiche, un'interazione dialettica (…) nella quale [lo studente] coinvolge le sue conoscenze precedenti, le sottopone a revisione, le modifica, le completa o le rifiuta per formare nuove concezioni" (Brousseau, 1997, pp. 82–83).

Principi della teoria dell'oggettivazione (di natura socioculturale)

P1. La conoscenza è l'attualizzazione o la materializzazione del *sapere* (inteso come pura *possibilità*, o come sequenza di azioni codificate storicamente e culturalmente) che si realizza attraverso l'*attività* (da intendere come *lavoro congiunto*) di studenti e insegnanti che pensano, sentono, interagiscono e agiscono insieme nel processo di attualizzazione o materializzazione del sapere.

P2. L'apprendimento è concepito sia in termini di processi di *oggettivazione* – processi che riguardano la conoscenza, nei quali si diventa progressivamente e criticamente consapevoli di sistemi di idee, significati culturali, forme di pensiero e di azione attraverso l'uso di differenti mezzi semiotici – sia in termini di processi di *soggettivazione* – processi che riguardano il soggetto, la sua relazione con un mondo che gli è esterno, ovvero "processi di creazione di un sé particolare (e unico)" (D'Amore & Radford, 2017, p. 122).

P3. Nei processi di oggettivazione e soggettivazione, studenti e insegnanti usano vari tipi di *mezzi semiotici di oggettivazione* (parole, gesti, artefatti, simboli matematici, grafici, …), i quali incorporano forme codificate di riflessione e di azione, storicamente e culturalmente costituite, permettono l'acquisizione progressiva da parte degli studenti di forme di azione e di riflessione codificate culturalmente (Radford, 2008a).

P4. L'apprendimento non è un processo di adattamento cognitivo individuale dello studente in totale autonomia, ma un "adattamento attraverso meccanismi sociali a un mondo di pratiche culturali" (D'Amore & Radford, 2017b, p. 116) che si manifesta nei processi di oggettivazione e soggettivazione.

Radford (2017b) dichiara che una teoria T_1 può sembrare "in risonanza" con un'altra teoria T_2. Questa risonanza è parte di un fenomeno generale che egli chiama *affinità* (Radford, 2017b). L'affinità può manifestarsi a livello di metodologia, principi teorici e/o domande di ricerca. Tuttavia, in generale, il significato di un oggetto O affine è differente nelle due teorie, in quanto l'oggetto O si trova di solito in "posti" diversi in T_1 e in T_2, ovvero il modo in cui O è concepito in T_1 può non coincidere con quello in cui O è concepito in T_2.

In particolare, non è possibile importare direttamente un oggetto affine che fa

> parte di una teoria nell'altra teoria. Il motivo è che una teoria è un *sistema*. Le domande di ricerca sono formulate in modo tale da avere un senso all'interno dei concetti e del vocabolario dei principi teorici; analogamente, la metodologia è profondamente legata ai principi teorici, che non costituiscono un agglomerato di affermazioni teoriche. La natura sistemica di una teoria esclude un omomorfismo ad ampio raggio che preservi in generale il significato. (Radford, 2017b, p. 224)

Il modello di teoria al quale Radford fa riferimento sembra legato al cosiddetto "modello deduttivo" del confronto fra teorie, basato sul *significato* piuttosto che sul *riferimento* (Agazzi, 2014). In base al modello deduttivo – del quale ci esimiamo dal descriverne le caratteristiche, rimandando il lettore interessato al volume di Agazzi (2014) – nessun concetto è dotato di un significato indipendente dalla teoria in cui ricorre, ovvero il significato di un concetto è sempre dipendente dal contesto o "carico di teoria" (*theory laden*). In base a tale modello non è dunque possibile supporre che due teorie, T_1 e T_2, siano in grado di spiegare da due differenti punti di vista un medesimo fatto se questo significa due cose diverse quando viene considerato come un enunciato di T_1 e quando viene considerato come un enunciato di T_2 (Agazzi, 2014). Di conseguenza, in base al modello deduttivo, due differenti teorie, come T_1 e T_2, non possono essere confrontate, ovvero sono *incommensurabili*. Questa è appunto la posizione di Radford (2017b) in relazione alla TSD e alla TO.

D'altra parte, come sostiene Agazzi (2014), seppure il contesto assiomatico, o il sistema di principi, contribuisca alla formazione del *significato* dei concetti che si presentano in una teoria, tale contesto o sistema di principi non può produrre o assicurare un *referente*, ovvero l'oggetto extralinguistico al quale si fa riferimento (per esempio mediante il termine "apprendimento"), per il quale deve essere fornita una fonte extralinguistica, indipendente dalle caratteristiche linguistiche o semantiche di qualsiasi particolare teoria: "questa fonte consiste nelle *operazioni* che non sono riducibili alle *osservazioni* che l'empirismo radicale richiede, in quanto esse sono essenzialmente legate alla *praxis* e possono essere connesse al significato grazie alla sua natura *intensionale*" (p. X).

Come precisa Agazzi (2014), il *significato* di un concetto ha sia una componente *referenziale* (un *riferimento* di natura pragmatica e operativa), sia una componente *contestuale* (un *senso* che dipende dal contesto teorico all'interno del quale il concetto è usato):

- La componente referenziale, il *riferimento*, costituisce il "nucleo stabile" del significato, indipendente dalla teoria, nel suo riferirsi ad aspetti della realtà mediante determinate *operazioni* (strumenti o procedure scientifiche concrete) che rientrano nella definizione del concetto, in quanto connettono il concetto a un referente, ovvero a un insieme strutturato di attributi che lo identificano e che non muta al variare del punto di vista (un *invariante*), riconosciuto e condiviso dalla comunità scientifica.
- La componente contestuale, il *senso*, "è necessaria per *riconoscere* il

referente, ma non ci *fornisce* il referente" (p. 191); essa dipende dal contesto teorico considerato, a sua volta strettamente legato al contesto storico e socioculturale; in particolare, dipende dalle relazioni di natura logica tra gli enunciati, ovvero dalla rete logica che esprime la struttura della teoria, come pure (aggiungiamo noi) dalle assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche che caratterizzano la ricerca scientifica (Guba, 1990).

In altre parole, il *significato* di un concetto è concepito *intensionalmente* (come insieme di attributi, qualità, proprietà e relazioni) con una "intensione di fondo" indipendente dalla teoria, in quanto esprime una relazione del concetto con qualcosa di *esterno* alla teoria, e con una "intensione mutevole", in quanto legata alla teoria in questione. Non coincide dunque né con il "referente" né con il "senso", ma li comprende entrambi. Ciascuna delle due componenti, da sola, non sarebbe infatti in grado di fornire informazioni sufficienti per riconoscere i molteplici usi di un medesimo concetto, termine o predicato in situazioni o contesti differenti.

Si pensi per esempio, in didattica della matematica, ai termini "oggetto matematico", "rappresentazione semiotica", "mezzo semiotico di oggettivazione", "attività matematica". I significati dei concetti espressi da tali termini contengono, da una parte, un nucleo stabile di significato, legato a specifiche pratiche di carattere matematico, determinate storicamente e culturalmente, indipendenti dalla teoria considerata in didattica della matematica; dall'altra, una componente mutevole, dipendente dal contesto della teoria in esame che specifica i loro usi in relazione ad altri termini, principi o predicati della teoria; usi di natura cognitiva (nel caso della TSD) o socioculturale (nel caso della TO).

Il confronto fra teorie, in tal modo, non presuppone l'invarianza di tutte le componenti intensionali dei termini o predicati condivisi dalle teorie, ma solo una stabilità inter-teorica del significato, determinata dalle componenti *referenziali* dell'intensione di certi predicati (termini che esprimono proprietà, relazioni o funzioni) "che possono essere riconosciuti come empirici (vale a dire, *predicati operativi*)" (Agazzi, 2014, p. 135). In altre parole, il confronto fra teorie non presuppone che i medesimi termini usati nelle differenti teorie di una data disciplina abbiano il medesimo "significato"; altrimenti il confronto sarebbe impossibile e non si potrebbe neppure parlare di progresso scientifico. Dunque, l'esistenza di una certa relatività semantica o variazione di significato dei concetti quando si passa da una teoria all'altra non implica né l'incomparabilità né l'incommensurabilità delle teorie.

Nel caso della TSD, fra gli oggetti, concetti o costrutti specifici vi sono, come è noto, i seguenti: situazione didattica, situazione a-didattica, milieu, contratto didattico, clausole, effetti, devoluzione, ostacolo (epistemologico, didattico, ontogenetico), istituzionalizzazione, ingegneria didattica.

Fra gli oggetti, concetti o costrutti specifici della TO vi sono invece, come è noto, i seguenti: attività, lavoro congiunto, oggettivazione, mezzi semiotici di oggettivazione, soggettivazione, alienazione.

Comuni a entrambe le teorie sono i termini che fanno riferimento al sapere, alla conoscenza e all'apprendimento, con intensioni diverse (di natura cognitiva o socioculturale) in base alla struttura o rete logica nella quale sono immersi.

Nello specifico, nel caso della TSD e della TO, si può parlare di stabilità inter-teorica del significato?

Per Radford (2017b):

> All'interno del costruttivismo nordamericano, come Simon (2012) ci ricorda, non è possibile eseguire un'analisi sociale e individuale *allo stesso tempo*. Non è possibile focalizzarsi e studiare contemporaneamente l'individuo e il sociale. Per il costruttivismo nordamericano, il sociale e l'individuo sono come le entità quantistiche che non si possono vedere contemporaneamente. (Radford, 2017b, p. 222)

E aggiunge: "Questo interessante problema non è specifico del costruttivismo. Appare anche nella teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1997). I costrutti di devoluzione, situazione didattica e *milieu* sono in realtà dei tentativi di affrontare [contemporaneamente] la questione del sociale e dell'individuo" (Radford, 2017b, p. 223).

Chiariamo anzitutto che la difficoltà o impossibilità di visualizzare determinate entità o processi fisici si fonda, come rileva Agazzi (2014), sulla tendenza a considerare gli oggetti fisici come "cose" dell'esperienza quotidiana o, meglio, nell'accezione espressa da Aristotele nella *Metafisica*, come entità tridimensionali, accessibili a più sensi contemporaneamente e separabili materialmente da altre "cose". Invece, un oggetto fisico è qualcosa di diverso da una "cosa". In particolare, vi possono essere delle proprietà dell'oggetto fisico che nell'esperienza quotidiana non appaiono fra loro associate, ma che possono essere unificate in uno specifico oggetto di una determinata teoria, come nella meccanica quantistica la natura sia corpuscolare sia ondulatoria della radiazione e della materia. Pur condividendo termini come "particella", "onda", "radiazione elettromagnetica" che esprimono concetti con componenti intensionali che si mantengono in parte invariate nell'identificare la natura corpuscolare e ondulatoria della radiazione elettromagnetica, la meccanica classica e la meccanica quantistica hanno oggetti differenti, non solo perché le operazioni di misurazione che li identificano sono diverse (ovvero i referenti sono differenti), ma anche perché nelle due teorie i medesimi termini sono connessi tra loro e con altri termini (come, per esempio, "posizione", "velocità", "traiettoria") in modo diverso, ovvero hanno sensi differenti. Le due teorie non sono pertanto comparabili per quanto riguarda la loro superiorità relativa. In altre parole, non si può accettare l'una (la meccanica quantistica) come un superamento dell'altra (la meccanica classica), bensì l'una accanto all'altra. D'altra parte, i loro domini non sono totalmente scollegati, anzi ammettono una certa sovrapposizione e ci sono alcuni problemi di confine (come la natura della luce) che possono essere indagati con gli strumenti di entrambe le teorie. Si può dunque affermare che la meccanica classica e la meccanica quantistica sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili.

Un discorso analogo si può fare per la TSD e la TO. Le due teorie hanno in comune alcuni concetti con lo stesso significato referenziale, indipendente dal contesto delle rispettive teorie, ovvero concetti con un "nucleo stabile" di significato (legati alle attività che si svolgono in aula su dati contenuti matematici, in particolare al problem solving); altri concetti (anche se hanno lo stesso nome) hanno invece diverse componenti referenziali ("apprendimento", "conoscenza", "sapere", per esempio).

In altre parole, le due teorie, pur essendo incommensurabili in senso molto stretto, condividono alcuni predicati operativi che permettono il confronto di alcuni dei loro enunciati.

La TSD e la TO sono dunque *parzialmente comparabili*.

Inoltre, poiché almeno un principio (o enunciato che risulta conseguenza logica dei principi) della prima teoria è respinto dalla seconda (in particolare quello relativo all'autonomia dello studente).

La TSD e la TO sono dunque *parzialmente compatibili*.

Entrambe, in ogni caso, permettono di incrementare la conoscenza su alcuni loro referenti, sia *teorici* (ancorati ai rispettivi principi-base), sia *empirici* (ancorati all'esperienza in quanto operativamente o empiricamente accessibili), evidenziandone diversi aspetti e gettando una nuova luce sugli oggetti di conoscenza, anche attraverso la messa in comunicazione delle loro diverse dimensioni esplicative, essendo una di carattere descrittivo-esplicativo (la TS), l'altra di carattere normativo-esplicativo (la TO)[6] (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, in corso di stampa).

La TSD e la TO hanno dunque *finalità esplicative parzialmente simili*.

Come evidenzia Simon (2009, 2012), nella ricerca in didattica della matematica è possibile coordinare gli approcci di natura cognitiva con quelli di natura sociale estendendo i loro specifici oggetti di analisi, sulla base della "distinzione tra ciò con cui si guarda e ciò che si guarda" (Simon, 2012, p. 46). In particolare, è possibile analizzare l'attività di un individuo da un punto di vista sociale, ovvero con strumenti o costrutti specifici dell'approccio teorico

[6] I termini "descrittivo-esplicativo" e "normativo-esplicativo" non sono intesi in senso assoluto, dato che ogni teoria presenta aspetti di entrambe le caratterizzazioni, ma nel senso che gli aspetti relativi a una prevalgono su quelli dell'altra.

di natura sociale; analogamente è possibile analizzare l'attività di un gruppo di individui da un punto di vista cognitivo, ovvero con strumenti o costrutti specifici dell'approccio teorico di natura cognitiva. Nel primo caso si ottiene un'analisi sociale dell'individuo, nel secondo caso un'analisi cognitiva di un gruppo di individui.

> I tentativi di espandere l'uso di una teoria sopra descritti mirano a utilizzare quanto più possibile le nostre conoscenze nell'analisi delle situazioni di apprendimento della matematica. Sia nelle situazioni individuali che in quelle di gruppo, i costrutti cognitivi e sociali possono fornire strumenti per l'analisi della ricerca. (Simon, 2012, p. 48)

Una domanda di ricerca non sempre è generata da o specifica di una prospettiva teorica. Ci sono problemi, di cui si occupa la didattica della matematica, che non derivano da una particolare prospettiva teorica, ovvero che richiedono differenti tipi di analisi o ricerche condotte da differenti prospettive teoriche (Simon, 2009). Da qui la necessità di individuare gli approcci teorici più utili per affrontare tali problemi in tutta la loro complessità, le strategie e i metodi di ricerca più efficaci per rispondere alle domande di ricerca, ovvero la necessità di un uso pragmatico, consapevole e inclusivo, di differenti approcci teorici in DdM. Per individuarli occorre, anzitutto, *comprendere*, poi *comparare* o *contrastare*, *coordinare* o *combinare*, ed eventualmente *sintetizzare* o *integrare* opportuni approcci teorici rispettando le loro identità (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) – sia per gestire le diverse problematiche che possono sorgere nel corso di una ricerca, sia per rispondere alle domande di ricerca che richiedono analisi più profonde e articolate da differenti punti di vista, sia per migliorare la credibilità, l'affidabilità e la trasferibilità dei risultati di ricerca.

Come afferma Confrey (1995), l'approccio costruttivista e quello socioculturale si sono evoluti per rispondere a diverse domande: "Dunque, la questione non è quale relazione ci sia tra le due teorie, ma quale relazione si vuole costruire tra le due prospettive teoriche, dati i problemi che si vogliono studiare" (p. 202).

Tra l'approccio costruttivista e quello socioculturale, Cobb e Yackel (1996) inseriscono l'approccio *emergente*, considerato come quello "nel quale le analisi costruttiviste psicologiche dell'attività dell'individuo sono coordinate con le analisi interazioniste del discorso e delle interazioni in aula" (p. 175). L'approccio emergente, secondo Cobb e Yackel (1996), è quello che coordina esplicitamente l'approccio costruttivista e quello socioculturale nell'analisi delle attività della classe intesa come società, in quanto "si focalizza sull'influenza della partecipazione degli individui a pratiche organizzate culturalmente" (p. 175). Una tale coordinazione emerge anche dallo studio di D'Amore (2005), che conduce sia un'analisi sociale dell'individuo, con strumenti e costrutti specifici dell'approccio di natura cognitiva, sia un'analisi cognitiva della classe intesa come società. In particolare, in tale studio la classe è intesa come una comunità di pratiche sia esplicite, individuali e collettive, stabilite a priori per tale società, aventi come scopo la costruzione di conoscenza matematica (pratiche concettuali, algoritmiche o esecutive, strategiche o risolutive, comunicative e trasversali), sia implicite, che riguardano l'adattamento dell'individuo alla società-classe con scopi non prettamente costitutivi della società-classe (scopi competitivi, legati al contratto didattico, tesi a influenzare il giudizio o a soddisfare le attese dell'insegnante, …), ovvero pratiche con scopi per lo più non apprenditivi, da considerare come "metapratiche".

Come afferma Simon (2009), che cita Lerman (2006): "Mentre la teoria socioculturale ha offerto nuove possibilità di ricerca e nuove interpretazioni, il costruttivismo continua a generare ricerche utili che non possono essere condotte da una prospettiva socioculturale" (p. 480).

Si tratta di un'ulteriore conferma che la TO non può essere accettata come un *superamento* della TSD, bensì *accanto* alla TSD, in quanto la TO e la TSD, come si è mostrato sopra, sono parzialmente comparabili, sono parzialmente compatibili e hanno *finalità esplicative parzialmente simili*.

In sintesi, si può affermare che la TO e la TSD condividono termini e asserzioni che esprimono concetti con alcune componenti intensionali che si mantengono invariate nel passaggio dall'una all'altra, indipendentemente dal tipo di analisi ("sociale" oppure "individuale", nelle parole di Radford sopra riportate) su cui esse si focalizzano, in particolare quelli relativi al sapere, alla conoscenza e all'apprendimento della matematica, in relazione alla situazione o al contesto di apprendimento. Tuttavia, i diversi ruoli giocati nelle due teorie dall'insegnante, dallo studente e dal sapere generano componenti intensionali mutevoli nei concetti che costituiscono le reti logiche che strutturano le due teorie, differenti strumenti e procedure di analisi. Dunque la TO e la TSD, occupandosi di oggetti differenti, non sono comparabili per quanto riguarda la loro superiorità relativa. D'altra parte, condividendo termini che esprimono concetti con componenti intensionali che mantengono una certa stabilità nel passaggio dall'una all'altra, i domini delle due teorie non sono affatto scollegati. Nella TSD gli aspetti culturali, sociali e istituzionali non sono trascurati, anzi hanno un ruolo rilevante, anche se i termini e le asserzioni che si riferiscono a tali aspetti (per esempio: "milieu", "situazione", "istituzionalizzazione") hanno significati differenti, in relazione alla struttura teorica in cui sono inseriti. In altre parole, la TO e la TSD sono parzialmente comparabili e parzialmente compatibili in quanto si basano sia su principi, termini e asserzioni con significati differenti ma con una certa stabilità inter-teorica, sia su strumenti, procedure, tecniche, metodi di analisi differenti, ma con un fine comune: incrementare la capacità di gestione, analisi e controllo delle situazioni o dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica e, più in generale, la quantità globale di conoscenza scientifica in didattica della matematica.

5. Conclusioni

Quando nacque la didattica della matematica in senso moderno, una sola teoria apparve alle luci della ribalta, la TSD, abbozzata rapidamente nel giro di una mezza dozzina d'anni di studi, analisi, sperimentazioni e riflessioni intensi; quando la nuova disciplina ebbe il consenso di un folto gruppo di matematici appassionati, cominciarono a farsi luce tante altre proposte teoriche, come APOS (Dubinsky, 1991, 2002), TAD (Chevallard, 1985, 1992, 1999), EOS (Godino & Batanero, 1994), teoria socioepistemologica (Cantoral & Ferrari, 2004) e altre. Fino a giungere alla TO.

Qualcuna di esse non era altro che una rielaborazione di teorie su basi psicologico-strutturaliste nel senso di Piaget, altre erano vere e proprie novità. Alcune erano autonome, altre potevano essere fatte rientrare da un punto di vista fondazionale le une nelle altre (D'Amore & Godino, 2006).

Accadeva allora quel che sempre succede al momento della formazione di una nuova comunità scientifica: una prima fase di disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa. Si può dire che, in questa fase, vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire tramite il confronto diretto i punti di vista propri e altrui; i lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa (D'Amore, 2007).

L'analisi degli scopi di ciascuna di tali teorie neonate viene spontaneo: a che cosa serve, che aspetti indaga davvero, con quali modalità, quali sono i suoi punti di forza, quali le sue basi scientifiche?

All'inizio gli studi critici di tali teorie furono per così dire puramente intrinseci, fino a quando non iniziarono studi comparativi, nei quali cioè si affrontava il problema di paragonare fra loro teorie, come abbiamo cercato di fare in questo articolo.

Non è un caso che, all'inizio, gli studi critici delle singole teorie citavano i classici Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend, Bunge, cioè i più conosciuti filosofi della scienza che sono stati alla base delle rivoluzioni critiche epistemologiche dell'ultimo secolo. E poi, pian piano, sempre più interessante e specifico si fece il confronto critico-analitico fra coppie di teorie; alcune lentamente passarono in secondo piano, come l'APOS; alcune vennero almeno in parte assorbite da altre (come la TAD nell'EOS) (D'Amore & Godino, 2006). Altre ancora si paragonarono fra loro per decretarne la profonda differenza o, come invece abbiamo cercato di fare noi, almeno per riconoscere una parziale confrontabilità; non per dichiararle simili o assimilabili, ma per dimostrare che non ci sono le contraddizioni che, a volte, sembrano voler essere messe in evidenza.

Così, nel nostro caso, la cosa che ci apparve subito evidente, quando decidemmo di confrontare senza preconcetti i fondamenti teorici di TSD e TO, è che ci sono temi affrontati dalla TSD che non lo sono nella TO; e temi della TO che non lo sono nella TS. Avendo interessi diversi, le due teorie non possono essere in opposizione o in contraddizione fra loro; lo sarebbero se, fissato un tema T, le analisi che vengono fatte fossero contraddittorie rispetto a T; ma se T interessa all’una e non all’altra, allora contraddizione teorica non c’è.

Abbiamo mostrato come TSD e TO sono *parzialmente comparabili* e *parzialmente compatibili* e come hanno *finalità esplicative parzialmente simili*; dunque come ci siano confrontabilità e non contraddizione.

Sono due teorie di enorme portata culturale, anche critica e concreta, di diversi periodi storici, entrambe vive e diffuse oggi, per le quali la ricerca è continua e viva (per la TSD: D’Amore & Fandiño Pinilla, 2019; per la TO: Asenova, D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, in corso di stampa).

Le modalità di studio sono diverse, le analisi di strumenti critici oggettivi sono diverse; rispetto ad alcuni temi una teoria è specifica e l’altra no, e viceversa. Si noti per esempio l’importanza strategica e teorica che ha la semiotica in TO e l’assenza di analisi semiotiche in TSD; l’importanza che ha il concetto di apprendimento in TO e la sua analisi euristica in TSD; si noti l’interesse estremo per le situazioni d’aula (triangolo della didattica, effetti, clausole, contratto didattico) in TSD e il diverso posizionamento degli aspetti legati alle situazioni d’aula in TO.

La netta separazione che viene talvolta suggerita ed evocata fra le due teorie non è tale da creare fratture insanabili o contraddizioni devastanti perché, come abbiamo mostrato in questo articolo, non ci sono realmente le cause o le circostanze per farlo. Cosicché abbiamo dedicato molte discussioni interne, analisi di articoli specifici di ricerca dei due principali autori e loro collaboratori per mostrare quel che ora è, a nostro avviso, il risultato interessante: contraddizione non c’è, anzi ci sono legami parziali ma effettivi fra le due teorie.

Riferimenti bibliografici

Agazzi, E. (2014). *Scientific objectivity and its contexts*. Cham: Springer International Publishing.

Arendt, H. (1958). *The human condition.* Chicago: The University of Chicago Press.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

Artigue, M. (1992). Didactic engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41–66). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., & Tavignot, P. (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (in corso di stampa). Analysis of some aspects regarding the theory of objectification. Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa* (*RECME*).

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica, 19*(1), 73–89.

Bakhtin, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, TX: University of Texas Press.

Balacheff, N. (1990a). Future perspectives for research in the psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 135–148). Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Bessot, A. (1994). Panorama del quadro teorico della didattica della matematica in Francia. *L'educazione matematica*, *9*(1), 37–73.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories: An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483–506). Berlin: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.

Bikner-Ahsbahs, A., Prediger, S., Artigue, M., Arzarello, F., Bosch, M., Dreyfus, T., Gascón, J., Halverscheid, S., Haspekian, M., Kidron, I., Corblin-Lenfant, A., Meyer, A., Sabena, C., & Schäfer, I. (2014). Starting points for dealing with the diversity of theories. In Bikner-Ahsbahs A. & Prediger S. (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 3–12). Cham: Springer International Publishing.

Bohórquez, A., & D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *AIEM–Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*(13), 85–103.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–124.

Bronckart, J. P., & Schneuwly, B. (Eds.). (1985). *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel-Paris, Delachaux et Niestlé.

Brousseau, G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire*. Paris: Dunod.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Ed.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428–457). Parigi: APMEP.

Brousseau, G. (1975). L'analyse de la didactique des mathématiques. *Actes du Colloque*, 13–15 marzo 1975. Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII*[e] *rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de* *l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain la Neuve: Presses Universitaires. [Ripubblicato su: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 1983, 165–198].

Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, *101*(3–4), 107–131.

Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41, 177–182.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(1), 37–127.

Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique.* Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of Mathematics Education* (pp. 110–119). Bielefeld, Germania: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques* (Thèse d'État). Université Sciences et Technologies, Bordeaux I.

Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1995). L'insegnamento di un modello dello spazio. In E. Gallo, M. Ferrari, & F. Speranza (Eds.), *La ricerca in didattica della matematica; finalità, contenuti, esempi* (Quaderni CNR, n. 15, pp. 19–44). Pavia: CNR.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conférence plénière, Convegno di didattica della matematica, 24-25 settembre 2004, Locarno, Svizzera.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G. (2015). Peregrinaciones en la didáctica de las matemáticas. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica*. Actas del Congreso Internacional homónimo (pp. 13–28). Santa Marta (Colombia), 9-11 settembre 2015, Universidad de La Sabana. Chía (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana. Video disponibile da: https://www.youtube.com/watch?v=iSbkkKWezt0

Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica: De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41–54. doi: 10.24844/EM3003.02

Brousseau, G., & Pères, J. (1981). *Étude du'un enfant en difficulté en mathématiques: "Le cas de Gaël".* Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, *18*(3), 261–286.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, *18*(2), 33–70.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir* *enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Clanché, P. (1994). L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein. In H. Hannoun & A.-M. Drouin-Hans (Eds.), *Pour une philosophie de l'éducation* (pp. 223–232). Bourgogne: CRDP.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3–4), 175–190.

Confrey, J. (1995). How compatible are radical constructivism, sociocultural approaches, and social constructivism? In L. P. Steffe & J. E. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 185–225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

D'Amore, B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: Effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22A*(3), 247–276. [Traduzione completa in lingua spagnola: La escolarización del saber y de las relaciones: Los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Relime, 3*(3), 2000, 321–338].

D'Amore, B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física].

D'Amore, B. (2002a). Gérard Vergnaud. In M. Laeng (Ed.), *Enciclopedia Pedagogica* (Appendice A-Z, pp. 1508–1509). Brescia: La Scuola.

D'Amore, B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*, 11, 63–71.

D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics, 23*(1), 47–51.

D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione in lingua spagnola: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF: Reverté-Relime]. [Edizione in lingua portoghese: D'Amore, B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. São Paulo: Escrituras].

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.

D'Amore, B. (2006). Presentazione dell'edizione italiana di L. Radford & S. Demers (2006). *Comunicazione e apprendimento* (pp. 1–2). Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2007). Scienza. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri.

D’Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(1), 1–22.

D’Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

D’Amore, B. (2017a). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell’oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, *1*(1), 4–20. www.rivistaddm.ch

D’Amore, B. (2017b). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretado en clave sociológica. In B. D’Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 29–41). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

D’Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA, 12*(2), 97–127.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analitico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, *14*(1), 48–61.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43–52.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161–196.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2008). Le rôle de l’épistémologie de l’enseignant dans les pratiques d’enseignement. Atti su DVD del Colloque Internationale: “Les didactiques et leurs rapports à l’enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?”. 18–20 settembre 2008. Bordeaux: Université de Bordeaux 4.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del “contratto”*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [Edizione in lingua spagnola: D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Bogotá: Magisterio].

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2012). Some relations between semiotics and didactics of mathematics. *Mediterranean Journal for*

Research in Mathematics Education, 11(1–2), 35–57.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punto di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Radford, L. (2009). Prefazione a Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica* (pp. 7–8). Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefazioni di Michèle Artigue e Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29*B(1), 11–40. [Versione in lingua spagnola: D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colleción "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotà: Universidad Nacional de Colombia].

D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and "mathematics languages": Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica*, *26*(1), 57–82.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere* (Vol. 2). Bologna: Pitagora.

Donham, D. L. (1999). *History, power, ideology: Central issues in Marxism and anthropology*. Berkeley: University of California Press.

Dubinsky, E. (1991). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, (pp. 160–202). New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349–382. [Versione in lingua italiana: Quale cognitivo per la didattica della matematica? *La Matematica e la sua didattica, 10*(3), 1996, 250–269].

Engels, F. (1955). *Dialettica della Natura*. Roma: Edizioni Rinascita.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. In R. L. Ancona, E. Faggiano, A. Montone, & R. Pupillo (Eds.), *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno. Atti del Convegno omonimo, Università di Bari, 19-21 febbraio 2004* (pp. 65–88). Milano: Ghisetti & Corvi.

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gardner, H. (1993). *Educare al comprendere: Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.

Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures*. New York: Basic Books.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoria de la didactica de las matematicas. In A. Gutierrez (Ed.), *Area de conocimiento: Didactica de la Matematica* (pp. 105–148). Madrid: Sintesis. [Versione in lingua italiana: Verso una teoria della didattica della matematica, *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 1993, 261–288].

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Grenier, D. (1996). Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques. *Actes de la 2èmes Journées de La Fouly "Méthodes d'étude du travail du professeur"*, avril 1996. [Dattiloscritto].

Guba, E. G. (1990). The alternative paradigm dialog. In E. G. Guba (Ed.), *The paradigm dialog* (pp. 17–27). Newbury Park, CA: Sage. Disponibile da http://www.revista-educacion-atematica.org.mx/descargas/vol30/3/02_REM_30-3.pdf

IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*, 323, 235–243.

Kant, I. (2000). *Critica della ragion pura*. Roma-Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1781).

Laborde, C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13° conférence internationale PME Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 46–61). Paris: PME.

Laborit, H. (1985). *Éloge de la fuite*. Paris: Gallimard.

Leontiev, A. N. (1969). *El hombre y la cultura: problemas teóricos sobre educación*. México, DF: Grijalbo.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 133–150.

Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, *38*(1), 8–13.

Lesh, R., Doerr, H., Carmona, G., & Hjalmarson, M. (2003). Beyond constructivism. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2–3), 211–233.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique*. *Actes de l'Université d'Eté*, *La Rochelle*, *Juillet 1998* (pp. 3–16). Clermont Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Marx, K. (1962). *Das Kapital: Kritik der politischen Ökonomie*. Erster Band (Vol. 1). Berlin, DDR: Dietz. (Lavoro originale pubblicato nel 1867). Testo disponibile da http://www.mlwerke.de/me/me23/me23_000.htm

Marx, K. (1968). *Ökonomisch-philosophische Manuskripte: Geschrieben von April bis August 1844 nach der Handschrift*. Leipzig, DDR: Reclam. (Lavoro originale pubblicato nel 1932). Disponibile da

http://www.mlwerke.de/me/me40/me40_465.htm
Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception*. Paris: Gallimard.
Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.
Nemirovsky, R. (2003). Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–135). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.
Perrin-Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97–147). Grenoble: La Pensée Sauvage.
Petter, G. (1961). *Lo sviluppo mentale nelle ricerche di Jean Piaget*. Firenze: Giunti.
Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165–178.
Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J., & Sensevy, G. (2010). Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research: Strategies and difficulties when connecting theories. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529–1534). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.
Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.
Radford, L. (2003a). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 49–79). Ottawa: Legas Publishing.
Radford, L. (2003b). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.
Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica, 19*(2)*,* 191–213.
Radford, L. (2006a). Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunitario. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Il convegno del ventennale. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n. 20. Castel San Pietro Terme, 3-4-5 novembre 2006* (pp. 65–72). Bologna: Pitagora.
Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129.
Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5)*. Larnaca, Cyprus, February 22–

26, 2007. CD-ROM.

Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008b). Di sé e degli altri: Riflessioni su un problema fondamentale dell’educazione. *La Matematica e la sua didattica, 22*(2), 185–205.

Radford, L. (2008c). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Radford, L. (2008d). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17).

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research: The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L’activitat docent intervenció, innovació, investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*] (pp. 33–49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.

Radford, L. (2014a). *On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective.* In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1–20). Vancouver, Canada: PME.

Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132–150.

Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory.* Singapore: Springer.

Radford, L. (2017a). Ser, subjetividad y alienación. In B. D’Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 137–165). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

Radford, L. (2017b). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 217–228.

Radford, L. (2018). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In F.-J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–147). Taipei, Taiwan: EARCOME.

Radford, L., & D’Amore, B. (Eds.). (2006). Semiotics, culture and mathematical thinking [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: Cinvestav. Disponibile da http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf

Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento: Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Bologna: Pitagora.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91–95.

Roth, M.-W. (2001). Gestures: Their role in teaching and learning. *Review of Educational Research, 71*(3), 365–392.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesi di dottorato di ricerca). Università di Palermo. Disponibile da https://rsddm.dm.unibo.it/wp-publications/2010-santi-1/

Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 285–311.

Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: A comparison between semiotic perspectives. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)* (pp. 2503–2512). Poland: University of Rzeszów.

Santi, G. (2012). Oggetti matematici, rappresentazioni semiotiche e significato: Il problema dei cambi di senso. *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 35A-B*(3), 328–348.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, *112*, 85–118. [Versione in lingua italiana: Il contratto didattico, *La matematica e la sua didattica*, 1998, *12*(2), 132–175].

Schubauer-Leoni, M.-L. (1986). Le contrat didactique: Un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *European Journal of Psychology of Education, 1*(2), 139–153.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1988a). Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement. *Interactions didactiques,* 8, 63–75.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1988b). Le contrat didactique: Une construction théorique et une connaissance pratique. *Interactions didactiques,* 9, 67–81.

Seitz, J. A. (2000). The bodily basis of thought. *New Ideas in Psychology*, *18*(1), 23–40.

Simon, M. A. (2009). Amidst multiple theories of learning in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(5), 477–490.

Simon, M. A. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. *PNA*, *6*(2), 43–49.

Sriraman, B., & English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(6), 450–456.

Sriraman, B., & English, L. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (Advances in mathematics education series). New York: Springer.

Teppo, A. R. (Ed.). (1998). *Qualitative research methods in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité: Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Berne: P. Lang. [Edizione in lingua italiana: Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la* *realtà*. Roma: Armando].

Vygotskij, L. S. (1966). *Pensiero e linguaggio*. Firenze: Giunti e Barbèra. [La I ed., Cambridge: MIT Press, 1962, è un riassunto tratto dalla ed. originale in lingua russa, raccolta di articoli pubblicati a Mosca nel 1956. L'ed. it. è condotta su quella in lingua inglese, tranne il cap. 7 che è traduzione integrale dall'originale].

Vygotskij, L. S. (1974). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze: Giunti-Barbèra. [La I edizione russa originale è del 1960].

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press. [Trad. it.: *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri, 1980. L'ed. in lingua inglese è tratta da articoli che Vygotskij scrisse in russo nel 1931].

Vygotskij, L. S., & Lurija, A. R. (1987). *La scimmia, l'uomo primitivo, il bambino: Studi sulla storia del comportamento*. Firenze: Giunti. [La I edizione russa originale è del 1930].

Wartofsky, M. W. (1979). *Models: Representation and the scientific understanding*. Dordrecht: Reidel.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Are representations useful in Economic Mathematics? Students' beliefs and self-efficacy beliefs in the case of exponential and logarithmic functions

Le rappresentazioni sono utili in Matematica per l'Economia? Convinzioni e convinzioni di autoefficacia degli studenti nel caso di funzioni esponenziali e logaritmiche

Athanasios Gagatsis,[1] Areti Panaoura,[2] Eleni Deliyianni,[3]
Styliana Nicolaou[1] and Iliada Elia[1]

[1]*Department of Education, University of Cyprus, Cyprus*
[2]*Department of Education, Frederick University, Nicosia, Cyprus*
[3]*Cyprus Ministry of Education, Culture, Sports and Youth*

Abstract. *The study examined the structure of beliefs of the undergraduate students who study economics about the value of mathematics as a tool and the use of representations in understanding exponential and logarithmic functions in relation to their respective self-efficacy beliefs. Results revealed that the students' beliefs and self-efficacy beliefs constitute a coherent model with high loadings. The low interrelation between the students' self-efficacy beliefs and their beliefs indicate that students need positive experiences in order to improve self-efficacy beliefs. The teaching processes in the economic sciences in higher education should reclaim and exploit their positive beliefs about the value of mathematics and the importance of using different modes of representations.*

Keywords: beliefs, self-efficacy beliefs, representations, functions, economic studies.

Sunto. *Lo studio ha preso in esame la struttura delle convinzioni degli studenti universitari che studiano economia sul valore della matematica come strumento e l'uso delle rappresentazioni nella comprensione delle funzioni esponenziali e logaritmiche in relazione alle loro rispettive convinzioni di autoefficacia. I risultati hanno rivelato che le convinzioni e le convinzioni di autoefficacia degli studenti costituiscono un modello coerente con carichi elevati. La bassa interrelazione tra le convinzioni di autoefficacia degli studenti e le loro convinzioni indica che gli studenti hanno bisogno di esperienze positive per migliorare le convinzioni di autoefficacia. I processi di insegnamento delle scienze economiche nell'istruzione superiore dovrebbero rivendicare e sfruttare le loro convinzioni positive sul valore della matematica e sull'importanza di utilizzare diverse modalità di rappresentazione.*

Parole chiave: credenze, credenze di autoefficacia, rappresentazioni, funzioni, studi di economia.

Resumen. *El estudio examinó la estructura de las creencias de los estudiantes de pregrado que estudian economía sobre el valor de la matemática como herramienta y el uso de representaciones en la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas en relación con sus creencias de autoeficacia. Los resultados revelaron que las creencias y las creencias de autoeficacia de los estudiantes constituyen un modelo coherente con las altas cargas. La baja interrelación entre las creencias de autoeficacia de los estudiantes y sus creencias indica que los estudiantes necesitan experiencias positivas para mejorar las creencias de autoeficacia. Los procesos de enseñanza en las ciencias económicas de la educación superior deben reclamar y explotar sus creencias positivas sobre el valor de la matemática y la importancia de utilizar diferentes modalidades de representaciones.*

Palabras clave: creencias, creencias de autoeficacias, representaciones, funciones, estudios económicos.

1. Introduction

The value of investigating various affective factors in higher education is indicated considering the number of studies (e.g. Crawford, Gordon, Nicholas, & Prosser, 1998; Van Dinther, Dochy, & Segers, 2011) that focus on this field. Recently, researchers (e.g. Dreher, Kuntze, & Lerman, 2015; Stohlmann, Moore, Cramer, & Maiorca, 2015) investigated pre-service teachers' views about using multiple representations in the mathematics classroom. Despite this interest, a limited number of studies have examined the beliefs concerning the use of mathematical representations of undergraduate students enrolled in disciplines other than mathematics or education. It is evident that various fields and disciplines make use of mathematics. For example, mathematical models describe complex phenomena and systems such as stock markets and logistics. Because of all the challenges occurring in the contemporary world, problems of economics and finance, social, environmental, and management sciences are being examined trying to find quantitative models based on mathematical and statistical theories, methods and tools (Melnik, Makarov, & Belair, 2017).

The aim of the study is to examine the structure of important aspects of affective system, the beliefs and self-efficacy beliefs, concerning mathematics as a tool and the use of representations in understanding exponential and logarithmic functions of undergraduate students who study economics. Mathematical representations are increasingly vital as far as expression and communication of ideas in economics is concerned. This is interesting, particularly with respect to the need for public understanding of economics. Furthermore, progressively more activity in the financial market is governed by mathematical models. In fact, economists are using economic and mathematical methods to analyze economic processes and predict any possible outcomes of economic activity (Mandanov & Khasanova, 2014). It should be noted that we concentrate on the concept of function for which a variety of representations such as diagrams, words and symbols are used. Additionally, it is a concept, which is used every day for currency and measurements especially by the economists.

As students of economics are the future professionals in the markets, this study attempts to make both a theoretical and practical contribution to the literature regarding undergraduate students' beliefs and self-efficacy beliefs concerning representations. Considering the fact that beliefs and self-efficacy beliefs are characterized as multidimensional constructs (Bandura, 1989; Goldin, 2002; Buehl & Alexander, 2006), the present study will clarify important aspects of such constructs. Furthermore, a number of studies (e.g. Bartimote-Aufflick, Bridgeman, Walker, Sharma, & Smith 2016; Lizzio, Wilson, & Simons 2002; Chemers, Hu, & Garcia 2001) demonstrate that affective factors reflect the quality of teaching methods in higher education, the teaching environment and the students' outcomes. Thus, the results of studies concerning affective factors such beliefs and self-efficacy beliefs are important to identify corresponding needs for economics in higher education.

2. Literature review

2.1. Beliefs and self-efficacy beliefs

Affective variables are considered by Boekaerts (2003) as important for learning. According to social cognitive theory, human behavior, environment and personal factors (e.g. cognition, emotion and motivation) work accordingly towards each other (Chiu & Klassen, 2010). Beliefs are among the main components of the affective domain (Goldin, 2002). Philipp (2007) defines beliefs as "psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true" (p. 259). Self-efficacy beliefs are beliefs about the ability to "organize and execute the courses of action required to produce given attainments" (Bandura, 1997, p. 3). According to Bandura's social cognitive theory, self-efficacy acts as agent of motivational orientation that enhances persistence in the case of difficulties, increases intentionality and long-term planning, and determines the development of self-regulation and self-correcting actions in a critical way (Bandura, 2001).

Several researchers (e.g. Gómez-Chacón, Romero-Albaladejo, & Garcia Lopez, 2016) stress the role that beliefs play in the performance of students in mathematics, because beliefs affect the way in which students learn and use mathematics. It was also found by many researchers that self-efficacy influences academic motivation, learning and achievement (Pajares, 1996; Schunk, 1981; Komarraju & Nadler, 2013). Recently, Laging and Voßkamp (2017) include self-efficacy beliefs among the main determinants of mathematics performance of first-year students in several business administration and economics study programs. Therefore, before investigating students' achievement in functions, we conclude that it is important to examine the structure of their beliefs and self-efficacy beliefs.

2.2. The semiotic approach to teaching and learning mathematics

The semiotic approach to teaching and learning mathematics is one of the most important and popular learning theories in mathematics education. Without any doubt one of the most eminent researcher in the domain is Raymond Duval. Some of his books and published articles have contributed to the development of the theoretical background of this domain of research (Duval, 1995, 2017). Moreover, a large number of publications support the theoretical and experimental semiotic approach to learning and teaching mathematics.

Thus, in the current bibliography it is widely accepted that it is important in mathematics teaching and learning to deal with multiple representations (Dreher & Kuntze, 2015). A representation is considered to be a sign or configuration of signs, characters or objects that can demonstrate something else apart from itself (Goldin & Shteingold, 2001). When students recognize the same concept in multiple systems of representations, manipulate the concept within these representations and convert it from one system of representation to another flexibly, engage in deeper sense making and understanding of the particular mathematical concept (Lesh, Post, & Behr, 1987) and see rich relationships (Even, 1998). A very important idea is that a single representation does not describe completely a mathematical construct. Thus, the use of multiple representations for the same mathematical situation is essential to understand mathematics and facilitates students to use effectively the different advantages each representation offers (Duval, 2006). Deliyianni, Gagatsis, Elia and Panaoura (2016) concentrate on representational flexibility and underline the need to give students a variety of situations including representational transformations with varied complexities concerning the same mathematical concept, the systems of representations, and the direction of inter-representational transformations.

Finally a special issue of the journal "Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa" on the topic "Semiotics and Mathematics Education" ("Semiotica y Education Matematica") edited by two famous researchers in the domain of mathematics education, Bruno D'Amore and Louis Radford, gives a very rich spectrum of researches related to semiotic representations and a considerable enforcement in the related theoretical framework.

The large number of researches on the use of representations could be roughly divided in 5 categories:

- The semiotic approach in mathematics education (e.g. Duval, 1995, 2017;

Goldin & Shteingold, 2001; D'Amore & Radford, 2006).

- The role of representational flexibility in understanding and learning mathematics (e.g. Duval, 2006; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011, 2017; Deliyianni, Gagatsis, Elia, & Panaoura, 2016).
- The role of representations in problem solving (e.g. Theodoulou, Gagatsis, & Theodoulou, 2004; Gagatsis, & Shiakalli, 2004; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007; Elia, 2020).
- Cognitive and affect factors related to the use of representations (e.g. Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2009, 2010).
- The definition of a mathematical concept and its relation to the representation flexibility (e.g. Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017).

2.3. The concept of function

Both secondary and higher education should aim to develop "a sense for function" (Eisenberg, 1992, p. 154). In order to achieve this, Eisenberg (1992) suggests that students should have the ability to relate graphical and analytical representations of functions. Because of the nature of the concept of function and of its central role in the mathematics of the secondary education, a substantial number of research studies (e.g. Hitt, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Ariza, Llinares, & Valls, 2015; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017) have examined the role that different representations play in the understanding and interpretation of functions. In fact, we have examples of publications in all the above mentioned 5 categories.

On the other hand, Ariza et al. (2015) support that the understanding of economic concepts is related to students' capacity to perform conversions and treatments among the algebraic and graphic representation of the function-derivative relationship when they extract the economic meaning of concavity/convexity in graphs of functions using the second derivative. It is evident that students face difficulties with functions which are caused by the need to connect various function representations such as equations, graphs and tables (Schoenfeld, Smith, & Arcavi, 1993). It is characteristic that a number of students believe that a function must be defined using a single algebraic formula and believe that the table is not a function (Clements, 2001). As Dubinsky and Wilson (2013) emphasize, even students who recognize various types of representations of functions, cannot integrate ideas from various representations. Furthermore, it is important that students perceive the inherent weaknesses of each representation and choose the most appropriate according to the specific context (Nyikahadzoyi, 2015).

Thus, the present study concerns the concept of function and in particular the cognitive and affect factors related to the use of representations in functions that is the fourth category of the above-mentioned classification.

2.4. Hypotheses of the study

Buehl and Alexander (2006) suggest that beliefs concerning knowledge are complex, multidimensional and interactive. As there is much knowledge, there are many beliefs concerning knowledge that are part of one's epistemological belief system. If individuals retain varied and sometimes opposite forms of knowledge in memory, then it is conceivable that the beliefs concerning such knowledge can be similarly varied and even opposite. Thus, while students may profess beliefs concerning the ambiguity of knowledge generally, they may also consider school knowledge to be rather certain (Buehl & Alexander, 2006). We assume that beliefs concerning the use of representations, beliefs about the value of mathematics as a tool in economics and the use of representations in exponential and logarithmic functions constitute distinct components of the domain of beliefs (hypothesis 1). Similarly,

- beliefs concerning the use of representations in general and beliefs concerning the importance of using representations in economics constitute distinct components of beliefs concerning the use of representations (hypothesis 2a);
- beliefs concerning the value of mathematics for an economist and beliefs concerning the value of mathematics for the science of economics constitute distinct components of beliefs concerning the value of mathematics in economics (hypothesis 2b);
- beliefs concerning the use of representations in exponential functions and the use of representations for logarithmic functions constitute distinct components of beliefs concerning the use of representations in functions, respectively (hypothesis 2c).

Mason and Scrivani (2004) indicate that beliefs concerning mathematics, mathematical learning and problem-solving and beliefs concerning the self in relation to mathematics constitute different categories of beliefs. As a result, we assume that self-efficacy beliefs are a distinct component of a higher-order construct that may be thought to stand for a major part of the affective domain regarding representations for the learning of functions (hypothesis 3). Self-efficacy is a multidimensional construct (Bandura, 1989) so self-efficacy beliefs concerning mathematics, the use of representations, the use of representations for exponential functions and the use of representations for logarithmic functions constitute distinct components of the self-efficacy domain (hypothesis 4).

3. Methodology

The study was conducted among the undergraduate students of the Faculty of Economics and Management at the University of Cyprus during the academic year 2015–2016 (all 241 year-1 students, all 130 year-4 students). It is evident that the present study is not a longitudinal one, the 130 students of the fourth year are different from the 241 students of the first year. Despite this, we believe that it is always useful to compare the beliefs of two groups of students of the same Faculty, despite the fact that we cannot give a solid interpretation to the results of the comparison. A questionnaire was compiled in order to investigate the students' beliefs and self-efficacy beliefs concerning mathematics, the use of representations in general and exponential and logarithmic functions in particular. The questionnaire comprises of 56 Likert-type items of five points (one = strongly disagree, five = strongly agree). The reliability of the questionnaire was high (Cronbach's alpha = 0.93). The items were content and face-validated by a professor of economics, an associate professor of management and a professor and an associate professor of mathematics education. The items were piloted before their final administration among 20 year-4 undergraduate students studying in the Faculty of Economics at the Aristotle University of Thessaloniki. Based on the specialists' comments and how the students participating in the pilot phase replied, a number of revisions were made regarding its length and clarity. The items of the questionnaire and their coding may be found in the Appendix.

The questionnaire consisted of statements, which were divided into two main categories. The first category investigated students' beliefs concerning mathematics which included the following dimensions: (a) beliefs concerning the value of mathematics as a tool in relation to their studies, (b) beliefs concerning the value of using different representations, (c) beliefs concerning the value of using representations in relation to their studies, (d) beliefs concerning the value of using representations of exponential and logarithmic functions in relation to their studies. The second category investigated students' self-efficacy beliefs concerning: (a) their mathematics achievement, (b) the use of representations and (c) the use of representations of exponential and logarithmic functions. The questionnaire was administered to the students by the researcher, who is one of the authors, under usual classroom conditions after explaining to them the aim and the significance of the present study. Lecturers left the room, 40 minutes before the end of their teaching period. Students completed the questionnaire in the presence of the researcher who had a passive role as a supervisor.

It should be noted that the questionnaire was anonymous. Despite the fact that the participation was voluntary, all the students filled in the questionnaire. In order to confirm the structure of students' beliefs and self-efficacy beliefs a confirmatory factor analysis model was constructed using Bentler's (1995) structural equation modelling program (EQS). The tenability of a model can be determined using the following measures of goodness of fit: x2/degrees of freedom (df) < 1.95, (comparative fit index) CFI > 0.9 and (root mean square error of approximation) RMSEA < 0.06. Firstly, confirmatory factor analysis was used in order to confirm the structure of the factors of beliefs and self-efficacy beliefs and then it was used in order to examine the interrelations among those affective variables. On the other hand, despite the fact that the two samples of students, do not belong to the same population, it is useful to examine the possible similarity of the beliefs of the two groups of students. That is why, an independent t-test analysis in SPSS statistics was used in order to examine if there were any differences concerning the factors of beliefs and self-efficacy beliefs among year-1 and year-4 students.

4. Results

4.1. Structure of students' beliefs and self-efficacy beliefs

Figure 1 presents the results of the elaborate model that fits the data reasonably well (x2/df = 1.67, df = 1283, CFI = 0.948, RMSEA = 0.043). The third order model that is considered appropriate, in respect to the hypotheses, for interpreting students' beliefs and self-efficacy beliefs involves 10 first-order factors, 4 second-order factors and a third-order factor. The four second-order factors that correspond to students' self-efficacy beliefs concerning mathematics and the use of representations (F11), their beliefs concerning the use of representations (F12), beliefs concerning the value of mathematics in economics and for an economist (F13) and beliefs concerning the use of representations in exponential and logarithmic functions (F14) are highly regressed on a third-order factor that stands for the affective domain regarding the representations for learning the concept of functions. Therefore, hypothesis 1 and 3 stated above are verified.

The four first-order factors (F1-F4) express the students' self-efficacy beliefs. Specifically, first-order factors refer to the following: self-efficacy beliefs concerning mathematics (F1), the use of representations (F2), the use of representations for exponential functions (F3) and the use of representations for logarithmic functions (F4). Those first-order factors regressed on a second-order factor concerning the students' self-efficacy beliefs, as hypothesis 4 supposes.

The second second-order factor expresses students' beliefs concerning the use of representations. It consists of two first-order factors concerning their beliefs concerning the use of representations (F5) and the importance of using representations in economics (F6). The third second-order factor expresses students' beliefs concerning the value of learning mathematics. It consists of two first order factors concerning the value of mathematics in economics (the first one is about the economists – F7 and the second one is about the science of economics – F8). Finally, the fourth second-order factor expresses students' beliefs concerning the use of representations in function concepts. It consists of two first-order factors about students' beliefs concerning the use of representations for the exponential functions (F9) and logarithmic functions (F10). Thus, hypotheses 2a to 2c are confirmed as well.

The high loadings indicate that there is a coherent model as far as undergraduate students' beliefs and self-efficacy beliefs concerning the specific domain are concerned. Students' self-efficacy beliefs regressed with a lower loading (0.526) on the third-order factor than their beliefs concerning the value of the representations in general (0.776), the value of mathematics (0.933) and the use of representations for the exponential and logarithmic functions (0.918). Thus, the results provide evidence that students have stronger beliefs than self-efficacy beliefs.

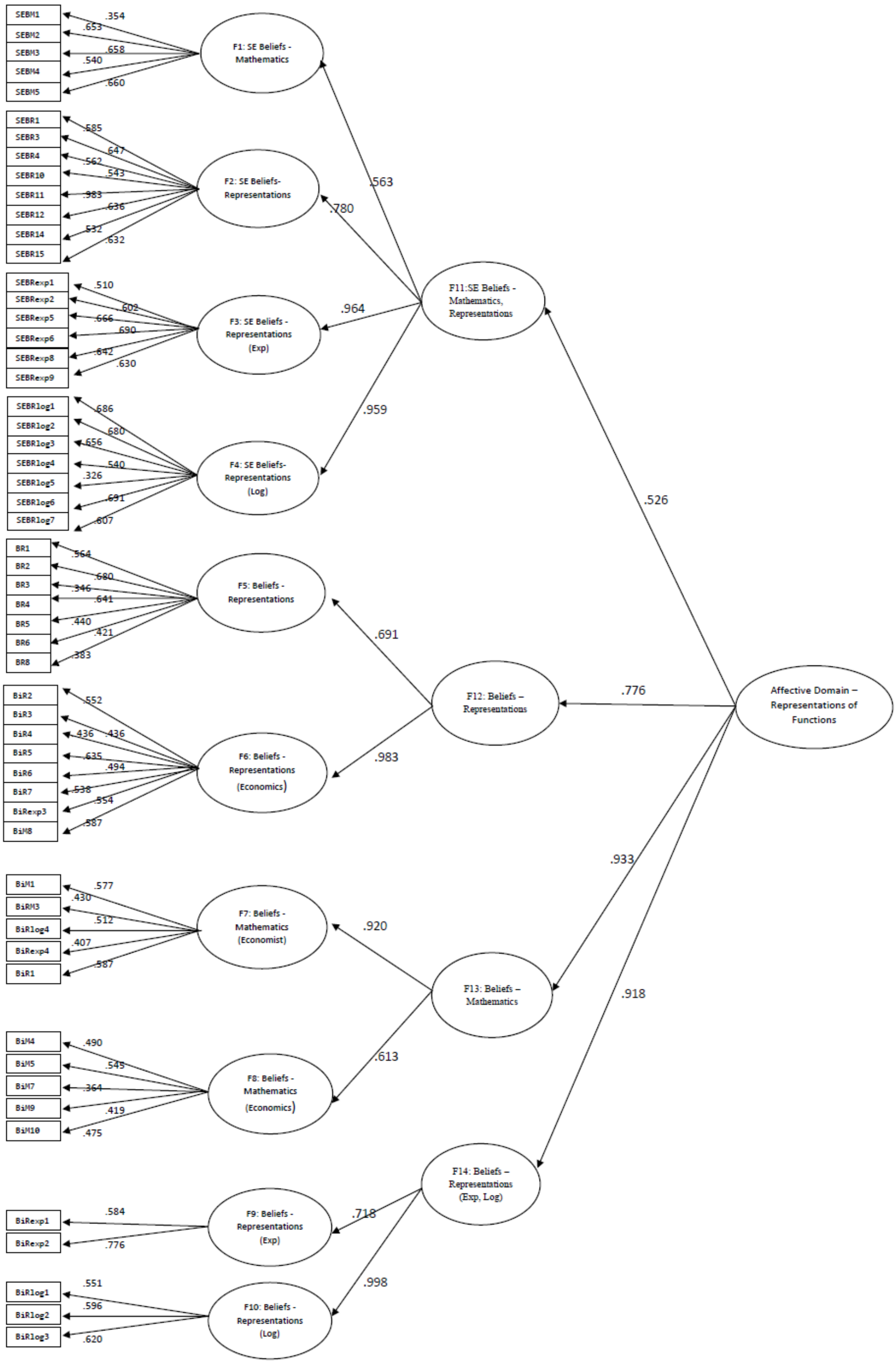

Figure 1. The CFA model of students' beliefs and self-efficacy (SE) beliefs.

4.2. Interrelations among the students' beliefs and self-efficacy beliefs

Figure 2 presents the interrelations among undergraduate students' beliefs and self-efficacy beliefs concerning mathematics and the use of representations for functions. In particular, we concentrated on the interrelations between the second-order factors in order to examine: a) the impact of beliefs on self-efficacy beliefs and b) the impact of more general beliefs concerning the value of mathematics and representations on more specific beliefs concerning the use of representations in logarithmic and exponential functions. The highest statistically significant loading is the one between the students' beliefs concerning the value of representations and their beliefs concerning the value of mathematics (0.918). This finding is explained considering the fact that students relate mathematics to the presence of symbols, graphs and models. At the same time the interrelations between their beliefs concerning the value of mathematics for the economic science is highly related to their beliefs concerning the use of representations for functions (0.873). It seems that students who have strong beliefs concerning the value of mathematics as one of the major subjects in their studies, have at the same time strong beliefs concerning the value of using representations in general and solving exponential and logarithmic functions.

The interrelation between students' beliefs concerning the use of representations in general and exponential and algorithmic functions is close as well (0.759). This is explained by the fact that university students appreciate the value of representations broadly.

The interrelation among students' self-efficacy beliefs concerning mathematics and their beliefs concerning the use of representations in general is statistically significant, but not as high (0.594) as the aforementioned ones. It seems that there are students who have strong beliefs, but they do not have the corresponding strong self-efficacy beliefs. Similarly, the interrelation among students' beliefs concerning the use of representations in the case of exponential and logarithmic functions and their self-efficacy beliefs in mathematics is statistically significant, but not high (0.573). However, the interrelation among students' beliefs concerning the value of mathematics for the economic science with their self-efficacy beliefs concerning mathematics is higher (0.653) than the aforementioned one. In general, it seems that there are students who have strong beliefs but do not have at the same time strong self-efficacy beliefs. A possible explanation for this is that students face difficulties in mathematics that do not allow them to achieve high performance.

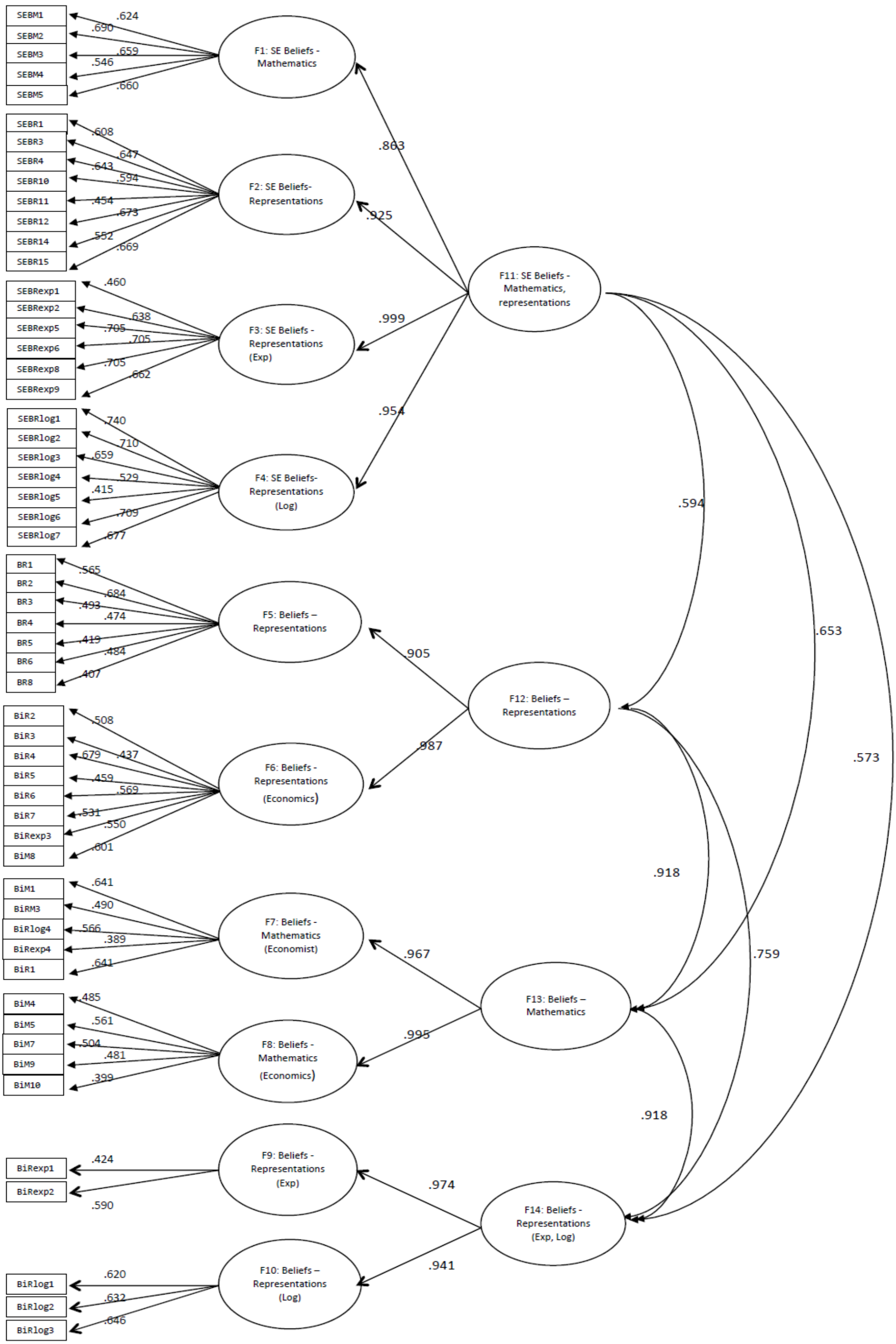

Figure 2. Interrelations among students' beliefs and self-efficacy beliefs.

4.3. Differences between year-1 and year-4 students' beliefs and self-efficacy beliefs

We have already noticed, that the present study is not a longitudinal one, the two samples of students are different. Thus, any comparisons of the means and standard deviations of each affective factors for year-1 and year-4 students, of the following Table 1 must be interpreted with caution.

Table 1
Mean and standard deviations of affective factors in each year

	1st year		4th year	
Factors	$\bar{x}$	S.D.	$\bar{x}$	S.D.
F1: SE Beliefs - Mathematics	3,46	0,71	3,64	0,67
F2: SE Beliefs - Representations	3,47	0,63	3,49	0,66
F3: SE Beliefs - Representations (Exp)	3,30	0,64	3,34	0,78
F4: SE Beliefs - Representations (Log)	3,16	0,65	3,18	0,71
F5: Beliefs - Representations	3,94	0,54	3,91	0,59
F6: Beliefs - Representations (Economics)	3,75	0,57	3,83	0,54
F7: Beliefs - Mathematics (Economist)	3,46	0,65	3,46	0,74
F8: Beliefs - Mathematics (Economics)	3,58	0,69	3,69	0,66
F9: Beliefs - Representations (Exp)	3,00	0,87	2,70	0,90
F10: Beliefs - Representations (Log)	3,24	0,82	3,12	0,84

According to the results, there is no statistical significance difference between year-1 and year-4 students' self-efficacy beliefs concerning mathematics and the use of representations (F1-F4), their beliefs concerning the value of representations (F5-F6), the value of mathematics for the science of economics (F7-F8) and students' beliefs concerning the use of the representations for the logarithmic functions (F10).

However, year-1 students' beliefs concerning the use of representations for the exponential functions (F9) are significantly stronger ($p<0.05$) in relation to those of year-4 students. This could be explained by the fact that the two samples of the students are not the same. We could also take into account the fact that the mathematics modules which students attend in year 1 and their requirements involved mainly exponential functions. Students who study economics at the University of Cyprus take a refresher mathematics module in the first semester. The module introduces mainly the basics of exponential functions. In the second and third semester students are enrolled in two modules in mathematical economics that focus on calculus and optimization. These modules do not offer any additional treatment of exponential functions but typically use them as examples in a limited number of applications. During the rest of their studies students generally do not often come across exponential functions as they are not commonly used to economic problems. Students who take optional modules in finance are more likely to encounter them as they are more commonly used to that field in order to analyze concepts such as compounding and present value calculations.

5. Discussion

Economics is a science that involves a large number and a wide variety of concepts, variables and models (Moosevian, 2016) and uses mathematics in order to explain phenomena and support assumptions. The present study concentrates on students' beliefs concerning the value of mathematics and representations for understanding functions, and their corresponding self-efficacy beliefs during their studies in economics. The confirmatory factor analysis indicated that ten first-order factors were required to account for the second-order factors for the beliefs and the self-efficacy beliefs concerning the role of mathematics in the science of economics, the role of representations in mathematics learning in general and in exponential and logarithmic functions in particular. The factor loadings of the proposed three-order model suggested that the affective domain regarding representations for the learning of functions constituted a multifaceted construct in which general beliefs concerning the use of representations, particular beliefs concerning the use of representations in functions, beliefs concerning the value of mathematics and self-efficacy beliefs concerning their ability in mathematics and the use of representations were involved. It should be mentioned that these constructs do not cover the whole spectrum of the affective domain regarding representations of functions. We suggest, however, that they reveal some needs that students have which if taken into consideration during the organization of economics modules may contribute to the improvement of students' beliefs and self-efficacy beliefs.

It is interesting that year-1 and year-4 students' self-efficacy beliefs concerning mathematics and the use of representations, their beliefs concerning the value of representations, the value of mathematics for the science of economics and students' beliefs concerning the use of representations for the concept of function do not differ significantly. Taking into account that the present study is not a longitudinal one, we cannot give a solid interpretation to the above-mentioned stability of beliefs.

Findings indicate that students of economic sciences have stronger beliefs concerning the value of mathematics for their studies and for the significance of using representations in general and the concept of function in particular than the corresponding self-efficacy beliefs. Although we do not have data about their corresponding mathematics performance, we believe that the difficulties students face during the first year of their studies or their previous experiences during the secondary education may act as obstacles to improve their self-efficacy beliefs. The next phase of our research will examine the interrelation of self-efficacy beliefs with previous mathematics achievements and with recent mathematics experience. A number of previous studies (e.g. Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, & Philippou, 2017; Sajka, 2003) indicate that students face many difficulties in understanding functions at different ages of secondary education which may affect their beliefs in higher education. Therefore, a possible explanation for our findings is that their experiences at secondary education and in particular their mathematical performance as it is revealed by their final grades in mathematics do not allow some students to develop strong self-efficacy beliefs (Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2010). They need strong and continuous positive experiences in order to change their self-efficacy beliefs. However, the fact that students have stronger beliefs than self-efficacy beliefs could be perceived as a positive result as they probably indicate that students realize the difficulties that they face and they do not tend to overestimate their abilities (Pajares & Miller, 1994). The accurate self-representation concerning the strengths and limitations is a presupposition for the development of self-regulation (Panaoura, Gagatsis, & Demetriou, 2009), an ability which is necessary in order to overcome difficulties. In fact, a priority of higher education should be to enable economics students to evaluate their own strengths and limitations and teach them self-regulatory strategies in order to persist in overcoming obstacles and difficulties during their studies. Their beliefs and their self-efficacy beliefs in the value of mathematics will be developed indirectly. This could also be true for science, engineering, and technology students, since mathematics is important for their studies as well.

The present study highlights the strong interrelations among students' beliefs and self-efficacy beliefs concerning the use of mathematics and representations effectively in understanding and presenting the concepts of the economic science. The university students' beliefs concerning the value of mathematics are of great importance. Hannula (2011) claimed that empirical research into mathematics-related beliefs indicates an overall pattern, where positive (or negative) beliefs are related to each other and to positive (or negative) emotions and positive (or negative) motivation. Believing that studying mathematics is important for their studies constitutes the first step in an attempt to make them believe that their abilities can change through hard work, persistence and insistence in facing and overcoming cognitive difficulties. Their positive strong beliefs concerning the value of mathematics for the economic science and the use of representations in mathematics could be reclaimed in order to overcome difficulties, develop self-regulatory strategies, improve their outcomes and consequently increase their self-efficacy. As Bartimote-Aufflick et al. (2015) indicate, university students' self-efficacy is higher under certain conditions than others and can be improved over time. For instance, research results indicate that self-efficacy was higher when particular teaching strategies were employed (Bartimote-Aufflick et al., 2015).

6. Conclusions and future study

The proposed structural model was found to function well in this study and revealed valuable information about undergraduate students' beliefs concerning the value of mathematics and representations for understanding functions, and their corresponding self-efficacy beliefs. However, the study was conducted at one site, with one questionnaire and one group of students. Furthermore, there is still information that needs to be discovered. It would be interesting in the future to examine the structure of students' beliefs and self-efficacy beliefs regarding the use of representations in relation to their achievement. Furthermore, it would be practically useful to investigate the impact of intervention programs that compare self-efficacy in a multi-representational learning environment for teaching mathematics courses in the economics science. Similar studies in other mathematics-related disciplines would also contribute to the discovery of students' needs in higher education.

References

Ariza, A., Llinares, S., & Valls, J. (2015). Students' understanding of the function derivative relationship when learning economic concepts. *Mathematics Education Research Journal*, *27*, 615–635. doi: 10.1007/s13394-015-0156-9

Bandura, A. (1989). Human agency in social cognitive theory. *American Psychologist, 44*(9), 1175–1184.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* New York, NY: Freeman.

Bandura, A. (2001). Social cognitive theory: An agentic perspective. *Annual Review of Psychology, 52*, 1–26.

Bartimote-Aufflick, K., Bridgeman, A., Walker, R., Sharma, M., & Smith, L. (2016). The study, evaluation, and improvement of university student self-efficacy. *Studies in Higher Education, 41*(11), 1918–1942. doi: 10.1080/03075079.2014.999319

Bentler, P. M. (1995). *EQS structural equations program manual.* Encino, CA, Multivariate Software Inc.

Boekaerts, M. (2003). Towards a model that integrates motivation, affect and learning. *British Journal of Educational Psychology, Monograph Series II,* 173–189.

Buehl, M. M., & Alexander P. A. (2006). Examining the dual nature of epistemological beliefs. *International Journal of Educational Research, 45*(1–2), 28–42. doi: 10.1016/j.ijer.2006.08.007

Chemers, M. M., Hu, L.-t., & Garcia, B. F. (2001). Academic self-efficacy and first-year college student performance and adjustment. *Journal of Educational Psychology, 93*(1), 55–64. doi: 10.1037//0022-0663.93.1.55

Chiu, M., & Klassen, R. (2010). Relations of mathematics self-concept and its calibration with mathematics achievement: Cultural differences among fifteen-years-olds in 34 countries. *Learning and Instruction, 20*(1), 2–17.

Clement, L. L. (2001). What do students really know about functions? *Mathematics Teacher, 94*(9), 745–748.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1998). University mathematics students' conceptions of mathematics. *Studies in Higher Education*, *23*(1), 87–94. doi: 10.1080/03075079812331380512

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics, 14*, 397–417. doi: 10.1007/s10763-015-9625-6

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 89–114.

Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2015). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German pre-service teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 363–382. doi: 10.1007/s10763-015-9633-6

Dubinsky, E., & Wilson, R. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 83–101.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berna: Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 153–174). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Elia, I. (2020). Word problem solving and pictorial representations: Insights from an exploratory study in kindergarten. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 17–31.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*(6), 658-672.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533–556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal* *of Mathematical Behavior, 17*(1), 105–121.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité: le cas du domaine numerique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 25–43.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of research studies. *Communication and Cognition, 50*(3–4), 93–120.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1)*,* 105–132.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645–657.

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehknonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 59–72). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). System of mathematical representations and development of mathematical concepts. In F. R. Curcio (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M., & del Mar García López, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 909–925.

Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Cerme 7, 9th - 13th February 2011, Rzeszów, Poland* (pp. 34–60). Rzeszów: University of Rzeszów.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123–134.

Komarraju, M., & Nadler, D. (2013). Self-efficacy and academic achievement: Why do implicit beliefs, goals, and effort regulation matter? *Learning and Individual Differences, 25*, 67–72. doi: 10.1016/j.lindif.2013.01.005

Laging, A., & Voßkamp, R. (2017). Determinants of maths performance of first-year business administration and economics students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3,* 108–142.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lizzio, A., Wilson, K., & Simons, R. (2002). University students' perceptions of the learning environment and academic outcomes: Implications for theory and practice. *Studies in Higher Education, 27*(1), 27–52. doi: 10.1080/03075070120099359

Mardanov, R., & Khasanova, A. (2014). Current issues of teaching mathematics in economic faculties of universities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 152*, 1062–1065.

Mason, L., & Scrivani, L. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and Instruction*, *14*(2), 153–176.

Melnik, R., Makarov, R., & Belair, J. (2017). Modern challenges and interdisciplinary interactions via mathematical, statistical, and computational models. In R. Melnik, R. Makarov, & J. Belair (Eds.), *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science* (pp. 3–16). New York.: Springer. doi: 10.1007/978-1-4939-6969-2_8

Moosavian, S. A. Z. N. (2016). Teaching economics and providing visual "big pictures". *Journal of Economics and Political Economy, 3*(1), 119–133.

Nicolaou, S., Gagatsis, A, Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I., & Anastasiadou, S. (2017). Tracing the beliefs and self-efficacy beliefs of undergraduate economic sciences students: The case of the representations of functions. In J.-C. Régnier, R. Gras, R. Couturier, & A. Bodin (Eds.), *Analyse Statistique Implicative: Points de vue conceptuels, applicatifs et métaphoriques* (pp. 457–474). Besançon: Université Bourgogne Franche-Comté.

Nicolaou, S., Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Televantou, I. (2019). Economic sciences students' understanding on representation tasks concerning the concept of function. In J.-C. Régnier, R. Gras, M. Henry, R. Couturier, & G. Brousseau (Eds.), *Analyse Statistique Implicative: Cadre théorique en relation étroite et au service de multiples disciplines* (pp. 281–302). Besançon: Université Bourgogne Franche-Comté.

Nyikahadzoyi, M. R. (2015). Teachers' knowledge of the concept of a function: A theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 261–283.

Pajares, F. (1996). Self-efficacy beliefs in academic settings. *Review of Educational Research*, *66*(4), 543–578.

Pajares, F., & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology, 86*(2), 193–203.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni E., & Elia, I. (2009). The structure of students' beliefs about the use of representations and their performance on the learning of fractions. *Educational Psychology, 29*(6), 713–728.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2010). A model on the cognitive and affective factors for the use of representations at the learning of decimals. *Educational Psychology, 30*(6), 713–734. doi: 10.1080/01443410.2010.501103

Panaoura, A., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2009). An intervention to the metacognitive performance: Self-regulation in mathematics and mathematical modelling. *Acta Didactica Universatatis Comenianae Mathematics, 9*, 63–79.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A structural model related to the understanding of the concept of function: Definition and problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15(4),* 723–740. doi: 10.1007/s10763-016-9714-1

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–

315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Radford, L., & D’Amore, B. (Eds.). (2006). Semiotics, culture and mathematical thinking [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: Cinvestav.
Sajka, M. (2003). A secondary school students’ understanding of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229–254.
Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student’s evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55–175). Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum Associates.
Schunk, D. H. (1981). Modeling and attributional effects on children’s achievement: A self-efficacy analysis. *Journal of Educational Psychology, 73*, 93–105.
Stohlmann, M., Cramer, K., Moore, T., & Maiorca, C. (2015). Changing pre-service elementary teachers’ beliefs about mathematical knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(2), 4–24.
Theodoulou, R., Gagatsis, A., & Theodoulou, A. (2004). Un’immagine vale più di mille parole… Ma che tipo di immagine risulta più efficace nelle attività di problem solving matematico degli studenti? *La matematica e la sua didattica, 18*(2), 4–32.
Van Dinther, M., Dochy, F., & Segers, M. (2011). Factors affecting students’ self-efficacy in higher education. *Educational Research Review, 6*(2), 95–108. doi: 10.1016/j.edurev.2010.10.003

APPENDIX

Conceptualization of students' beliefs and self-efficacy beliefs

Affective factor	Questionnaire Item	Variables
Self-efficacy beliefs concerning Mathematics	I am able to understand mathematical concepts and procedures.	seBM1
	I feel confident when I have to use Mathematics	seBM2
	I am able to use Mathematics to solve financial/ management problems.	seBM3
	I have the ability to solve a financial/ administrational problem requiring the use of Mathematics.	seBM4
	I have the necessary skills to use and apply Mathematics.	seBM5
Self-efficacy beliefs concerning the use of representations	I am able to convert one representational system into another (e.g. from algebraic to graphical)	seBR1
	I am able to use representations effectively.	seBR3
	I have the ability to modify and use representations.	seBR4
	I can analyze the representations given to me.	seBR10
	I am able to recognize the graph of a function.	seBR11
	I can sketch the graph of a function.	seBR12
	I am able to apply properties for processing a representation.	seBR14
	I am able to use various forms of representation given to me effectively.	seBR15
Self-efficacy beliefs concerning the use of the representations for exponential functions	I have the ability to solve exponential functions.	seBRexp1
	I have the necessary knowledge about the representations of exponential functions.	seBRexp2
	I have the ability to use representations of exponential functions in my economic analysis.	seBRexp5
	I am able to use representations of exponential functions effectively.	seBRexp6
	I have the ability to use representations of exponential functions given to me.	seBRexp8
	I have the ability to analyze representations of exponential functions given to me.	seBRexp9
Self-efficacy beliefs concerning the use of representations for logarithmic functions	I have the ability to solve logarithmic functions.	seBRlog1
	I have the necessary knowledge of the representations of logarithmic functions.	seBRlog2
	I can convert the algebraic representation of the	seBRlog3

	logarithmic function into graphical representation.	
	I can convert the graphical representation of the logarithmic function into algebraic representation.	seBRlog4
	I prefer to solve problems that include representations of logarithmic functions.	seBRlog5
	I have the ability to use representations of logarithmic functions in my economic analysis.	seBRlog6
	I am able to use representations of logarithmic functions effectively.	seBRlog7
Beliefs concerning the use of representations	The graphical representation is a useful tool in problem solving.	BR1
	The graphical representation is an important way of understanding a concept.	BR2
	In order to solve some exercises, I have to construct a diagram.	BR3
	In order to solve many exercises, I have to understand the graphical representation given.	BR4
	Using representations can provide me with some useful information that might help me solve the corresponding problem.	BR5
	The construction of a representation to solve an exercise is helpful.	BR6
	The exercises in which graphical representation is given are easier to solve.	BR8
Beliefs concerning the importance of using representations in economics	The most appropriate way to present an economic analysis is through representation.	BiR2
	From the financial / administrative problems analyses some representations results which will need to understand and analyze were found.	BiR3
	Representations help me to solve financial / managerial problems.	BiR4
	In order to find the right solution to a financial problem, the use of representation is necessary.	BiR5
	Representations help me to understand a given financial situation.	BiR6
	The use of representations helps me to present financial concepts to the general public in a simple way.	BiR7
	The relationship between two variables is an exponential function is essential in many financial applications and analyses.	BiRexp3
	Mathematics theorems which deal with economic matters are good economic	BiM8

	analysis.	
Beliefs concerning the value of Mathematics for an economist	Mathematics is essential in my work.	BiM1
	The better I am at Mathematics, the better I will be in my work.	BiM3
	In our attempt to explain or analyze a dependent variable with respect to an independent variable, we use representations of exponential functions.	BiRexp4
	Representations of logarithmic function are an important tool for the students of economics / Finance / Administration.	BiRlog4
	The use of representations is helpful in my studies.	BiR1
Beliefs concerning the value of Mathematics for the science of economics	Without mathematics my science cannot exist.	BiM4
	Mathematical rules and procedures are necessary for financial/ administrative problems analyses.	BiM5
	Economic analyses which are emphasized in mathematical models correspond to reality.	BiM7
	Mathematics is used to explain the concepts of the economy.	BiM9
	The economic models are based on mathematical rules.	BiM10
Beliefs concerning the use of representations in the exponential functions	Representations of exponential functions are part of my everyday study.	BiRexp1
	Representations of exponential functions are very important in my science.	BiRexp2
Beliefs about the use of representations in the logarithmic functions	Representations of logarithmic functions are part of my daily study.	BiRlog1
	The representations of logarithmic functions are used in my science.	BiRlog2
	Economics /Finance / Administration students should be familiar with the use and processing of representations of logarithmic functions in their economic analyses.	BiRlog3

Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes

Spiegazioni dei professori universitari di matematica sulle possibili cause di alcuni errori dei loro studenti

Henry Alexander Ramírez Bernal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia

Abstract. *This article reports some preliminary results obtained in the doctoral research developed by the author, and whose main purpose is to determine how the conceptions of a group of professors in mathematics (who teach in early semesters of undergraduate studies) change when they reflect and discuss possible causes of errors made by students in mathematics. Teachers taking part in the research have the opportunity to reflect individually (through an initial inquiry instrument) and discuss with peers (through focus group meetings) about the nature of these errors and the theoretical references in mathematics education that propose explanations for those errors and its possible causes. The explanations of some teachers (participants during the first phase of the study conducted between 2018 and 2019) who answered the initial inquiry questionnaire are described and discussed. Teachers' responses are contrasted with appropriate theoretical references.*

Keywords: obstacle, misconception, didactic contract, conversion, treatment, Duval's cognitive paradox, change of conceptions.

Sunto. *Questo articolo riporta alcuni risultati preliminari ottenuti nella ricerca di dottorato sviluppata dall'autore e il cui scopo principale è determinare come le concezioni di un gruppo di professori (che insegnano nei primi semestri dei corsi universitari) relative alla matematica cambiano quando essi riflettono e discutono sulle possibili cause di errori commessi dagli studenti in matematica. Gli insegnanti che hanno preso parte alla ricerca hanno avuto l'opportunità di riflettere individualmente (attraverso un opportuno strumento di indagine iniziale) e di discutere con i colleghi (attraverso focus group) sulla natura di questi errori e sui riferimenti teorici della didattica della matematica che propongono spiegazioni di tali errori e sulle loro possibili cause. In questo articolo vengono analizzate le dichiarazioni di alcuni professori (che hanno partecipato alla prima fase della ricerca condotta tra il 2018 e il 2019) che hanno risposto al questionario di indagine iniziale. Le risposte dei professori sono analizzate attraverso riferimenti teorici appropriati.*

Parole chiave: ostacolo, misconcezione, contratto didattico, conversione, trattamento, paradosso cognitivo di Duval, cambio di concezioni.

Resumen. *En el presente artículo se reportan algunos resultados preliminares obtenidos en la investigación doctoral desarrollada por el autor y que tiene como propósito fundamental determinar cómo cambian las concepciones de un grupo de profesores de matemática (quienes enseñan en primeros semestres de universidad) cuando reflexionan y dialogan sobre las posibles causas de los errores cometidos por sus estudiantes en matemática. Los profesores participantes tienen la oportunidad de reflexionar individualmente (mediante un instrumento de indagación inicial) y discutir con pares (mediante reuniones de focus group) sobre la naturaleza de esos errores y sobre los referentes teóricos en didáctica de la matemática que proponen explicaciones para esos errores y sus posibles causas. Se describen y discuten las explicaciones de algunos profesores (participantes durante la primera fase del estudio realizada entre 2018 y 2019) quienes respondieron un cuestionario de indagación inicial. Se contrastan las respuestas de los profesores con referentes teóricos apropiados.*

Palabras clave: obstáculo, misconcepción, contrato didáctico, conversión, tratamiento, paradoja cognitiva de Duval, cambio de concepciones.

1. Premisa

En la investigación doctoral se pretende estudiar los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad (con diferentes tipos de formación profesional y experiencia docente) sobre las causas de los errores de sus estudiantes en matemática. La investigación de corte cualitativo considera tres fases para la recolección de la información: fase de invitación a participar e indagación inicial, fase de discusión y reflexión y fase de entrevistas individuales. En la fase de indagación los profesores respondieron un cuestionario escrito que buscó caracterizar las concepciones de los profesores al inicio de su participación en el estudio. Diversas investigaciones en didáctica de la matemática han presentado tipologías sobre los errores en matemática y algunos estudios, como el de Ramírez (2013), han intentado profundizar en las concepciones de los profesores sobre los errores en matemática de sus estudiantes.[1] El análisis

[1] Entre las investigaciones y estudios sobre el tema se pueden mencionar: una clasificación y caracterización de los errores de aprendizaje de la matemática (Rico, 1995), los obstáculos epistemológicos asociados al aprendizaje matemático (Brousseau, 1976), aspectos didácticos que influyen en el proceso de su aprendizaje como la trasposición didáctica (Chevallard, 1985) o el contrato didáctico (Brousseau, 1976), estudios sobre el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991), la paradoja cognitiva de Duval en relación a las dificultades de naturaleza semiótica (Duval, 1993), convicciones de profesores y estudiantes sobre área y perímetro (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007), estudios centrados en dificultades de aprendizaje de objetos matemáticos específicos como en el caso de la derivada (Sánchez-Matamoros, García,

de los resultados obtenidos en la primera fase del estudio permite contrastar las respuestas de los profesores con lo reportado en la literatura pertinente e identificar coincidencias y posibles nuevos hallazgos sobre las creencias y concepciones de los profesores sobre el error a través de las explicaciones de los docentes participantes.

2. Marcos teóricos

2.1. Error en el aprendizaje matemático, obstáculos, dificultad y tipologías de aprendizaje matemático

Los errores matemáticos de los estudiantes visibilizan lo problemático que puede ser para ellos el aprendizaje de la matemática, revelando posibles dificultades y obstáculos en ese proceso. Resulta por tanto oportuno delimitar teóricamente parte de la terminología usual en el estudio de los aspectos problemáticos del aprendizaje de la matemática: error, obstáculo, dificultad, misconcepción, representaciones semióticas y contrato didáctico; estas nociones han sido investigadas, caracterizadas y conceptualizadas en el marco de la didáctica de la matemática.

Aunque puede asociarse la idea de error con un concepto erróneo o con una acción desacertada de un estudiante en la actividad matemática, las investigaciones han mostrado que su naturaleza trasciende esta visión reduccionista y resulta más compleja. Matz (1980, p. 94) ha señalado que los errores son "intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"; para Ruano, Socas y Palarea (2008, p. 2) los errores en matemática aparecen "principalmente en el trabajo de los alumnos cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben". Estos autores consideran además que el error "puede tener distintas procedencias, pero siempre se considera como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste" (2008, p. 2). De acuerdo con D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010) un error es sólo la manifestación de un malestar cognitivo. Brousseau (1983) ha señalado que el error no es necesariamente y solo un resultado de la ignorancia, la incertidumbre y el azar, sino que es el resultado de un conocimiento previo el cual fue exitoso, pero que resulta erróneo o simplemente no es aplicable en otras circunstancias. Adicionalmente Brousseau (2001) afirma que en didáctica de la matemática se considera que los errores son específicos de un conocimiento y/o de una situación matemática, son inherentes al proceso de aprendizaje y al proceso de enseñanza; el maestro debe combinar un nivel de riesgo de error soportable y una probabilidad suficiente de beneficio de él.

& Llinares, 2008) y en general del cálculo (Tall, 1993), el infinito (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011) y el número cero (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012), entre otros.

D’Amore et al. (2010, p. 48) definen obstáculo como “sinónimo de cualquier cosa que se interpone al aprendizaje esperado en la dirección docente-estudiante cualquiera sea su naturaleza”. Para D’Amore et al. (2010, p. 49) los obstáculos “no son solo y exclusivamente falta de conocimiento, a veces son expresiones de conocimientos”; de acuerdo con estos autores, el estudiante utiliza este conocimiento para dar respuesta adecuada en un contexto conocido, encontrado en precedencia; si el estudiante trata de usar este conocimiento fuera del contexto conocido ya encontrado, fracasa, generando respuestas incorrectas. El obstáculo produce contradicciones, pero el estudiante se resiste a tales contradicciones; pareciera que requiere de un conocimiento más general, más profundo, que generalice la situación conocida y resuelta, y que comprenda la nueva en la cual ha fracasado. Es necesario que este punto se haga explícito y que el estudiante sea consciente de esto; aunque una vez superado, de modo esporádico el obstáculo reaparece a lo largo del curso de la ruta cognitiva del estudiante.

La epistemología y el estudio histórico de las ideas matemáticas son fundamentales para comprender la naturaleza de los errores de los estudiantes como lo reconoce Brousseau (1976) quien sustenta fuertemente sus aportes en la noción de obstáculo y caracteriza tres tipos: obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico y obstáculo ontogenético. Para este autor los *obstáculos epistemológicos* son constitutivos del conocimiento en que se apuntan y se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos. De acuerdo con Artigue (1990, p. 8) los *obstáculos ontogenéticos* “están unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza”; los *obstáculos didácticos* de acuerdo con Brousseau (1976, p. 10) “son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo”.

Existe amplia y diversa investigación sobre los obstáculos en el aprendizaje matemático; se mencionan aquí sólo algunos de los múltiples resultados de estos estudios: El Bouazzoni (1988) estudió la existencia de obstáculos en la comprensión de las funciones continuas, Luis, Moreno y Waldegg (1991) investigaron sobre los usos potenciales y actuales del término infinito; Tirosh y Tsamir (1996), Tsamir y Tirosh (1992, 1999) reportan sus resultados de investigación sobre las dificultades de los estudiantes para comprender el infinito y específicamente el infinito actual. D’Amore y Fandiño Pinilla (2012) describen los obstáculos epistemológicos presentes en la comprensión de los números naturales y en particular del número cero. Godino, Batanero y Font (2003) señalan que:

> El término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (Godino, Batanero, & Font, 2003, p. 73)

La dificultad en matemática puede asumir por lo menos tres sentidos distintos como lo indican D'Amore et al. (2010): la dificultad en matemática del estudiante, la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática. Fandiño Pinilla (2010) propone cinco tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones que contribuyen a analizar diversos componentes del aprendizaje matemático: conceptual o noético, algorítmico, estratégico, comunicativo y aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

2.2. Misconcepciones, representaciones semióticas y contrato didáctico

En el proceso de aprendizaje matemático se pueden generar en los estudiantes conceptualizaciones erróneas que de perdurar pueden obstaculizar su comprensión matemática, dando lugar a *misconcepciones.* De acuerdo con D'Amore y Sbaragli (2005) el término misconcepción ha sido usado por décadas en la investigación en educación matemática e interpretado con connotaciones negativas como juicio erróneo, idea equivocada, equívoco o malentendido y también en un sentido más extenso como concepción falaz.[2] Silver (1985) vincula fuertemente las misconcepciones con las creencias erróneas; para Schoenfeld (1985) los estudiantes pueden desarrollar algunas concepciones incorrectas, particularmente en relación con los procedimientos. D'Amore (1999, como se cita en D'Amore et al., 2010, p. 78) propone un sentido constructivo para definir el término misconcepción señalando que es un concepto erróneo, el cual constituye un acontecimiento que debe evitarse; para D'Amore no debe verse como una situación del todo negativa: para lograr la construcción de un concepto puede ser necesario pasar a través de una misconcepción momentánea. Algunas misconcepciones se derivan directamente de la trasposición didáctica del saber y son denominadas por Sbaragli (2005) *evitables* pues son consecuencia de las elecciones del profesor; las misconcepciones *inevitables* de acuerdo con Sbaragli (2005) se deben a la inevitabilidad del paso por las representaciones semióticas de los objetos matemáticos.

Las representaciones semióticas de los objetos matemáticos contribuyen fuertemente al estudiar los errores en matemática de los estudiantes. D'Amore (2004) afirma que las representaciones son necesarias en la construcción de los conceptos matemáticos pues no se dispone de objetos concretos, reales que

---

[2] En este artículo se emplea la palabra *misconcepción* del idioma español como equivalente al término ingles *misconception* y a la palabra italiana *misconcezione*; D'Amore y Sbaragli (2005, p. 140) señalan textualmente sobre la palabra inglesa misconception: "La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come giudizio erroneo, idea sbagliata, ma anche equivoco o malinteso; si trova intesa anche nel senso più esteso di concezione fallace". ["La palabra inglesa *misconception* es interpretada generalmente como juicio erróneo, idea equivocada, pero también ambigua o incomprendida; también se entiende en el sentido más amplio de concepción falaz"].

puedan exhibirse en su lugar. D'Amore, Fandiño y Iori (2013, p. 124) justifican lo anterior porque los objetos matemáticos no "son cosas corpóreas (por ejemplo, no son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper). No existen en la realidad, cosas que se llamen puntos matemáticos, números, figuras, rectas, igualdad; ningún objeto matemático es una cosa real". D'Amore, Fandiño Pinilla, y Iori (2013, p. 124) señalan además que "la conceptualización cognitiva matemática no es y no puede ser basada sobre significados que se apoyan en la realidad concreta dado que, en matemática no son posibles reenvíos ostensivos". El hecho de recurrir en la actividad matemática a las representaciones semióticas de los objetos matemáticos implica fuertes dificultades en el aprendizaje,[3] como se sintetiza en la paradoja cognitiva de Duval:

> por una parte, la construcción cognitiva de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra parte, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. (Duval, 1993, como se cita en D'Amore et al., 2013, p. 127)

El análisis semiótico de los errores en el aprendizaje matemático requiere comprender cómo *funcionan* las representaciones semióticas de los objetos matemáticos y sus trasformaciones durante el aprendizaje de los estudiantes. Este tipo de análisis se vale de las nociones de registro de representación semiótica y de las transformaciones al interior y entre registros semióticos (tratamiento y conversión). Para Duval (2006) estas transformaciones están en el corazón de la actividad matemática y su diferenciación constituye el primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión matemática de los estudiantes. Tanto la conversión (Duval, 2006) como el tratamiento (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Santi, 2010; Rojas, 2014) son fuente de fuertes dificultades en el aprendizaje matemático.

La noción de contrato didáctico propuesta por Brousseau constituye uno de los referentes teóricos de mayor trascendencia en didáctica de la matemática por su potencial para explicar las complejas interacciones entre profesor y estudiante en la clase de matemática en relación con el saber matemático que es objeto de aprendizaje y su funcionamiento en el aula. Brousseau (1980; 2007) interesado en el estudio de las causas del fracaso en matemática ubicadas en la relación del estudiante con el saber y con las situaciones didácticas y que no estarían ligadas con sus aptitudes u otras características señala que el contrato didáctico (Brousseau, 1986) está constituido por los hábitos específicos del profesor esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el profesor que ocurren en una situación de enseñanza preparada y realizada por el maestro. De acuerdo con

[3] Lo cual es coherente con la tipología de aprendizaje semiótico propuesto por Fandiño Pinilla (2010) como referente teórico para analizar la dificultad.

Alagia, Bressan y Sadovsky (2005, p. 37) el contrato incorpora al análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática "un aspecto esencial: la intención de que el alumno aprenda un saber cultural, intención que tiene el docente y que necesariamente el alumno debe compartir". Adicionalmente estas autoras señalan algunas características del contrato didáctico:

> Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático se negocian significados, se trasmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, este juego es el contrato didáctico. (Alagia et al., 2005, pp. 37–38)

El contrato didáctico constituye un referente teórico en didáctica de la matemática que continúa vigente como objeto de investigación como lo muestran algunos estudios recientes. Por ejemplo, D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy (2010) proponen una visión crítica y moderna sobre el contrato didáctico. Por otra parte, Narváez Ortiz (2017) propone un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas.

2.3. Creencias, concepciones y convicciones sobre las causas del error en matemática

De acuerdo con Pajares (1992) las creencias constituyen verdades personales indiscutibles que se derivan de la experiencia o de la fantasía del individuo y tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo. Moreno y Azcárate (2003, p. 67) señalan que "no se fundamentan en la racionalidad sino sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo". Para Schoenfeld (1992, como se cita en Pehkonen y Törner, 1999) las creencias son comprensiones y sentimientos que dan forma a la manera en que un individuo conceptualiza y se involucra con el conocimiento matemático. De acuerdo con Pehkonen y Pietilä (2003) las creencias pueden considerarse desde diferentes enfoques dependiendo de su relación con el conocimiento, las actitudes, las creencias o la metacognición del individuo; así, Pajares (1992) y Furinghetti (1996) consideran las creencias como parte del conocimiento, Grigutsch (1998) las ubica como parte de las actitudes y para Thompson (1992) son parte de las concepciones. Schoenfeld (1987) considera las creencias como parte de la metacognición del individuo. En el caso específico de los profesores García, Azcárate, y Moreno (2006) identifican algunas características de las creencias del profesor: se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso enseñanza aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno.

Algunos autores señalan que, en contraste con las creencias, las concepciones poseen un mayor nivel de racionalidad, elaboración cognitiva y de consciencia. Por ejemplo, Pehkonen y Pietilä (2003) subrayan el componente cognitivo de las concepciones mientras que en las creencias subconscientes se enfatiza el componente afectivo. García, Azcárate y Moreno (2006, p. 87) consideran que las concepciones "consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes". Estos autores adicionalmente caracterizan algunas de las concepciones del profesor: forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. D'Amore (2008) define epistemológicamente la concepción como un

> conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas. (D'Amore, 2008, p. 88)

Autores como D'Amore y Fandiño (2004) o Campolucci, Maori, Fandiño y Sbaragli (2006) privilegian el uso de la palabra convicción en sus estudios sobre cambios (de convicciones) de los profesores. D'Amore y Fandiño Pinilla (2004, p. 26) asumen la convicción en el sentido de creencia: "*belief* o creencia: opinión, conjunto de juicios y de expectativas, lo que se piensa a propósito de algo". De acuerdo con Martínez Padrón (2013) las creencias:

> Constituyen convicciones personales, en diferentes grados, acerca de algo (objeto o situación) o alguien, son adquiridas y reforzadas a partir de la historia/experiencia de vida de quien las posee y son elementos que implícitamente se tienen presentes al momento de actuar ante el objeto o sujeto que las motivan. (Martínez Padrón, 2013, p. 234)

Pehkonen (2001) señala que las creencias pueden ubicarse en un amplio rango que puede ir desde creencias profundas hasta creencias superficiales; este autor se refiere a este rango como niveles de convicción.

En esta investigación doctoral se ha asumido el sentido de racionalidad y elaboración cognitiva de las concepciones como rasgo diferenciador fundamental frente a la falta de racionalidad que caracteriza a las creencias.

3. Problema de investigación

Autores como Ramírez (2013) y Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) han sugerido que los profesores presentan explicaciones sobre las causas de los errores en matemática de sus estudiantes que se distancian de los referentes teóricos y de investigación apropiados propuestos desde la didáctica de la matemática; estas explicaciones de los profesores están vinculadas con sus creencias y concepciones influyendo en muchos casos negativamente en la forma como los profesores conciben las causas del error en matemática. Lo anterior resulta problemático si el profesor realiza profesionalmente su ejercicio docente y asume la responsabilidad de ayudarle al estudiante a superar sus errores en matemática; precisamente sobre lo anterior Ball, Thames y Phelps (2008) han señalado que la enseñanza implica más que la identificación de respuestas incorrectas, pues una enseñanza competente requiere poder reconocer el origen de un error matemático. Para estos autores, este es un trabajo que debe realizarse rápidamente, sobre la marcha, porque en el salón de clases, los estudiantes no pueden esperar mientras el profesor se pregunta sobre la matemática. En una vía similar se han expresado Borasi (1987) y Brodie (2014) quienes coinciden en llamar la atención sobre el potencial del error como una posible vía para que el profesor pueda acceder al pensamiento de los estudiantes en su forma de hacer matemática. De lo anterior puede afirmarse que es primordial comprender las posibles causas de los errores más que la simple identificación del error en matemática de los estudiantes: la importancia del proceso no consiste en el reconocer *el* error, sino *la causa de tal* error.

Si la forma en que el profesor de matemática aborda durante su ejercicio profesional los errores en el aprendizaje matemático está privilegiadamente influida por creencias y concepciones ingenuas o distantes de las explicaciones teóricas sobre estos errores y sus causas, difícilmente podrá realizar una gestión efectiva en el aula para mejorar la comprensión de sus estudiantes. La posibilidad de que los profesores modifiquen sus concepciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje en matemática al tomar consciencia de la necesidad de explicaciones más elaboradas (sustentadas por ejemplo en referentes teóricos propuestos en didáctica de la matemática) y que disten cada vez mas de explicaciones ingenuas podría contribuir favorablemente en su enseñanza de la matemática. Pehkonen (2006) ha señalado que un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre ellas se produce aprendizaje, de tal forma que la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir. Las investigaciones han evidenciado que las concepciones de los profesores pueden cambiar y en qué condiciones se producen tales cambios (Pehkonen, 2006). En contraste con la idea que cambios sustantivos en los profesores son concebidos generalmente como procesos graduales, complejos y difíciles (Guskey, 2003, como se cita en Bobis, Way, Anderson, & Martin, 2016), algunos autores como Liljedahl (2010) han notado cambios rápidos y profundos en las creencias y prácticas de los profesores.

4. Pregunta de investigación

En la investigación doctoral se busca profundizar en la comprensión, descripción y caracterización de los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores (en ejercicio) de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes. Se propone una intervención en la que se promueve la reflexión crítica, el debate y la discusión por parte de los profesores participantes. La intervención es realizada por el investigador quien presenta a los profesores la teoría de obstáculos y la teoría de representaciones semióticas como referentes teóricos y de investigación que ayudan a explicar las posibles causas de algunos errores provenientes de diversas fuentes (como su propia práctica y de la literatura especializada). La investigación consiste en tres fases: invitación a participar e indagación inicial con la que se busca caracterizar las creencias y concepciones de los profesores sobre al iniciar el estudio, una segunda fase de reflexión crítica que se desarrolla mediante discusiones orientadas en grupos focales (focus group) y finalmente una fase de entrevistas personales con el investigador en los casos que se desea profundizar en algunos de los aspectos tratados en las fases anteriores. La información obtenida debe permitir realizar un análisis de corte cualitativo descriptivo para responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la matemática se producen a partir de una reflexión crítica (sustentada en la teoría de obstáculos y teoría de las representaciones semióticas de Duval) sobre el análisis de los errores de sus estudiantes?

5. Algunos resultados preliminares obtenidos de la indagación inicial

5.1. Recolección de información: indagación inicial

Inicialmente se envió (por correo electrónico) o se entregó personalmente (en físico) una carta de invitación (individual) a participar en el proceso de investigación a un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad, que se encuentran en ejercicio y que están vinculadas con alguna institución de educación superior en la ciudad de Bogotá y municipios aledaños (Chía y Soacha). Los profesores invitados a participar por su trayectoria profesional y experiencia pueden brindar información específica y pertinente para el desarrollo de la investigación. En la carta entregada a los profesores se describen: los propósitos de la investigación, las actividades que se desarrollarán, el rol de los profesores y del investigador y la disponibilidad requerida (tanto de tiempo como de desplazamiento). Adicionalmente se les solicitó a los profesores que identificaran algunos errores en matemática de sus estudiantes y propusieran posibles explicaciones para sus causas, mediante un siguiente cuestionario específico previamente diseñado.

La información recogida en la fase indagatoria permitió caracterizar algunas de las creencias y concepciones iniciales de los profesores sobre las causas del error en matemática de sus estudiantes, acceder a un primer soporte/evidencia de información y obtener información utilizable en el desarrollo de las sesiones posteriores, como insumo para el análisis y discusiones de los profesores.

5.2. Resultados obtenidos y análisis preliminar

Las respuestas de los participantes permitieron evidenciar fuerte coincidencia entre los profesores participantes en los cursos que han orientado: cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal y matemática básica o precálculo hacen parte en general de la base experiencial de todos los docentes que respondieron el cuestionario de inicial. Estos cursos usualmente se ubican en los primeros semestres de los diferentes programas académicos. Así mismo hay una gran coincidencia en su ejercicio profesional como profesores de programas de ingeniería y ciencias económicas y administrativas.

Por otra parte, los errores de los estudiantes descritos por los docentes coinciden en muchos casos con lo reportado en la investigación sobre errores y específicamente en las tipologías sobre el tema.[4] Los profesores participantes identificaron errores algebraicos, errores aritméticos, errores de tipo geométrico, errores vinculados a objetos matemáticos del cálculo (funciones, límites, derivadas) y otros relacionados con su forma de argumentar entre otros. Estos errores reportados se refieren a problemas en las operaciones con fracciones, simplificaciones incorrectas, resolución de ecuaciones, uso de reglas inadecuadas en procesos algorítmicos (por ejemplo, para el cálculo de derivadas), problemas con el uso de la letra en matemática y su interpretación, resolución de problemas de geometría entre otros. En cuanto a las explicaciones de los profesores sobre las causas posibles de los errores se obtuvieron respuestas que van desde justificaciones que se distancian por completo de los referentes teóricos hasta respuestas que incluyen un análisis detallado de cada error con intentos de argumentar sólidamente algunas de las posibles causas. Sin embargo, no se incluyen en las respuestas de los profesores referencias concretas y/o explícitas a los referentes teóricos de la didáctica de la matemática presentados en los apartados anteriores salvo algunas excepciones particulares. Por razones de espacio, sólo se muestran en el presente artículo algunas de los resultados obtenidos en esta indagación inicial.

5.3. Algunas explicaciones de los profesores a las causas del error en matemática de sus estudiantes

Considérese el caso de un binomio elevado al cuadrado y desarrollado incorrectamente como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{(x+y)^2 = x^2 + y^2}$$

---

[4] Aquí no se pretende mostrar una tipología de errores. El interés del autor se enfoca en mostrar la forma como los profesores explican algunos de los errores de sus estudiantes como parte del análisis de la tesis doctoral. Para profundizar sobre tipologías de errores se recomienda consultar Rico (1995).

Algunos profesores incluyeron este ejemplo en sus respuestas al cuestionario inicial que puede ser considerado uno de los casos típicos de errores en el álgebra de estudiantes universitarios. Entre los argumentos de los profesores para la posible causa de este error se encuentra el "desconocimiento de los estudiantes" como lo señala Humberto:[5] "no tienen claro las operaciones de los exponentes" o como lo señala el profesor Mario: "no se tiene en cuenta la jerarquía de las operaciones"; el profesor William se expresa en un modo similar: "al elevar el binomio al cuadrado, lo vuelve un binomio de los términos al cuadrado y no el trinomio cuadrado perfecto. Desconocimiento del desarrollo de un binomio al cuadrado". En contraste con la respuesta anterior algunos de los profesores explican el proceder de sus estudiantes mostrando un intento de reflexión sobre su causa como lo evidencia la respuesta del profesor Milton:

> Recuerdan, vagamente, que alguna de las propiedades de la potencia de una multiplicación es el producto de las potencias. Por lo cual, asocian ese esa suma como si fuera un producto. Por otro lado, olvidan que un binomio al cuadrado es un objeto que está multiplicado por él mismo.

En este caso el error puede estar motivado por el uso de un conocimiento que funcionaba en un contexto pero que ya no es apropiado en otro contexto, lo que es la idea base del concepto de obstáculo. El profesor Carlos por su parte parece reconocer (aunque no explícitamente) la responsabilidad de la enseñanza a la que ha estado sometido el estudiante:

> En el desarrollo de los conceptos y algoritmos del álgebra básica, los estudiantes están expuestos a un número considerable de fórmulas, las cuales no son dadas a ellos mediante un proceso de construcción de conocimiento, o de experiencias de aprendizaje significativas que les permita diferenciar los diferentes algoritmos y apropiarse de los objetos matemáticos.

Otros profesores coinciden en señalar la posible influencia de la forma como se realiza la enseñanza y también la responsabilidad de los docentes sobre las causas posibles de los errores de sus estudiantes. Por ejemplo, el profesor Javier llama la atención sobre el deficiente desempeño y aversión de los estudiantes por la trigonometría: "la trigonometría no se maneja, y además tiene aversión per se por parte de ellos, no solo no la comprenden, sino que la entienden como algo feo". Javier intenta explicar esto preguntándose por el sentido en una referencia tácita a la enseñanza: "cadenas infinitas de identidades sin sentido, llegar de un lado a otro a cualquier costo... un año de eso… ¿Y el sentido?, ¿lo canónico de esto?, ¿la utilidad?".

También es mencionada la gestión del profesor en los problemas de los estudiantes en el caso de simplificaciones inadecuadas en fracciones; para ilustrarlo el profesor Ernesto presenta el siguiente ejemplo:

---

[5] En el presente artículo se usan seudónimos para identificar a los profesores participantes.

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}$$

De forma similar el profesor Carlos muestra el siguiente ejemplo en el que se ha simplificado incorrectamente $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}$:

$$\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2x}+\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}}=\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{2x}+\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}}=\boldsymbol{2x}+\boldsymbol{3}$$

Para el profesor Ernesto este tipo de errores de simplificación dependen de la complejidad de las expresiones y son frecuentes en precálculo y cálculo diferencial. Al explicar las posibles causas señala: “el estudiante procura replicar lo que realizan sus maestros, como regularmente encuentran que los procesos algebraicos necesitan simplificación, procuran reducir las expresiones buscando una respuesta elemental”. Entre tanto el profesor Carlos señala que los estudiantes simplifican términos del numerador y el denominador sin considerar las adiciones o sustracciones que se lo impiden. Carlos identifica dos causas posibles de estos errores:

> Esto puede deberse al uso de expresiones por parte del profesor que crean en el estudiante ideas erróneas, por ejemplo, decir que dos términos se simplifican por ser iguales. Además, se evidencia que los estudiantes no logran hacer uso correcto de propiedades y operaciones de los números racionales, pues usualmente se explican algoritmos donde prima el resultado y no el concepto.

El profesor Javier incluye varios ejemplos relativos a las fracciones similares a los anteriores y argumentando sobre sus posibles causas: “obstrucciones didácticas en procesos de formación media, frases como: cancelen arriba y abajo”. En las respuestas de los profesores mencionados sobre las simplificaciones incorrectas puede evidenciarse un reconocimiento de posibles obstáculos didácticos, aunque sin mencionar explícitamente esta terminología propia de la didáctica de la matemática.

La suma de numeradores y denominadores para realizar la operación de suma de números racionales es mencionada por varios de los participantes. El profesor Humberto lo ilustra como sigue:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{6}}$$

Humberto explica el error y su causa afirmando que “suman numeradores y denominadores. No tienen claro que los quebrados tienen diferentes denominadores”. El profesor Andrés señala que este error se debe a “existencia de confusión entre algoritmos en los números racionales”. En un sentido similar se expresa el profesor Milton: “la causa de los errores cometidos en los ejemplos expuestos resulta que los estudiantes aún no han comprendido el concepto de fracción y que, para la suma, es mucho más fácil sumar fracciones homogéneas”. Las explicaciones de los profesores en este caso tienden y se reducen a asociar la causa a una "falta de comprensión de las fracciones" pero no profundizan en sus posibles causas. En contraste, es un hecho que las dificultades de los estudiantes al operar con fracciones han sido investigadas profusamente de acuerdo con Fandiño Pinilla (2009). Esta autora señala que "gran parte de la literatura internacional muestra la enorme dificultad conceptual que tienen los estudiantes al realizar las operaciones entre fracciones" (Fandiño Pinilla, 2009, p. 145). En la comprensión de las dificultades de los estudiantes con las fracciones es fundamental el estudio de sus aspectos semióticos asociados; precisamente en relación con la adición de fracciones esta autora señala:

> La investigación de los últimos 30 años logró evidenciar el hecho de que es necesario dar siempre *sentido* a lo que se está haciendo y esto sucede a través del manejo de varios registros semióticos y con la implicación personal del estudiante en la construcción del propio conocimiento. (Fandiño Pinilla, 2009, p. 146)

Las dificultades de los estudiantes en la resolución de ecuaciones aparecen reiteradamente en las respuestas de los profesores. El profesor Carlos afirma que "el estudiante no establece un orden adecuado para despejar variables en ecuaciones" como en el caso que ilustra sus respuestas:

$$\mathbf{2 = \frac{1}{\boldsymbol{x}} + 2}$$

$$\mathbf{2\boldsymbol{x} = 1 + 2}$$

Para Carlos las posibles causas pudrían encontrarse en la gestión del profesor:

> Este error puede estar sujeto a la falta de conexión con contenidos como la jerarquía de operaciones, ya que el profesor al hacer estos procedimientos suele mencionar que los términos pasan de lado a lado de una ecuación, pero asume que el estudiante entiende el orden. Además, el uso de estas expresiones resulta inadecuado, pues los términos no "pasan" o cosas por el estilo, con lo cual el estudiante olvida la naturaleza de las ecuaciones.

También en el caso de ecuaciones, Javier presenta el siguiente ejemplo extraído de su práctica: "al formular la pregunta ¿cómo se resuelve la siguiente ecuación? $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$"; de acuerdo con Javier la tercera parte de sus estudiantes respondieron "por cuadrática profe". Javier describe brevemente la situación de aula en relación con este ejemplo: "Aunque parezca broma, esta fue la respuesta de cerca de 10(/30) jóvenes que tomó aceptación casi unánime en el salón. Y si factorizamos, les dije, respondieron, para qué si con la cuadrática sale de una". Para Javier, la causa de este tipo de error recae nuevamente en el profesor: "limitación de ejemplos en procesos de enseñanza que obstruye el aprendizaje al particularizar demasiado una situación. Explicación de herramientas sin el sentido que lo subyace". Las explicaciones mencionadas sobre las causas de los errores resolviendo ecuaciones revelan un reconocimiento de posibles obstáculos didácticos. Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, esta no necesariamente es la única causa posible. Por ejemplo, en el caso de despejar en una ecuación la dificultad puede estar asociada a la trasformación semiótica de tratamiento en el registro semiótico de la escritura de las ecuaciones.

6. Comentarios finales

Este primer ejercicio de indagación realizado en el marco de la investigación doctoral permitió evidenciar que los profesores tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre los errores de sus estudiantes y sus posibles causas llevándolos a realizar una revisión de su propia experiencia profesional en la enseñanza de la matemática universitaria. De la información recolectada y a pesar de la gran heterogeneidad en las explicaciones para las posibles causas del error en matemática de sus estudiantes, en esta primera fase de la investigación se puede afirmar que existen al menos dos tipos de respuestas que muestran las posibles concepciones de los profesores sobre las causas de los errores de los estudiantes. Por una parte, algunas respuestas atribuyen la causa de esos errores a simple desconocimiento e incluso descuido poniendo toda la carga del error en el mismo estudiante. De otra parte, hay una gran coincidencia en algunas respuestas sobre el reconocimiento de la responsabilidad del docente y sus elecciones a la hora de la clase como posibles causas de los errores de sus estudiantes; esto da un indicio de reconocimiento de posibles obstáculos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (aunque los profesores no lo mencionan con ese nombre). Este reconocimiento de la responsabilidad del profesor podría considerarse como punto de partida para la reflexión en la siguiente fase de la investigación que consiste en la discusión con pares en focus group con lo que se estudiarán los posibles cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas del error en matemática. También estas respuestas muestran argumentaciones que tratan de explicar de forma detallada las posibles causas del error, aunque en algunos casos estas explicaciones no corresponden o corresponden parcialmente con los referentes teóricos apropiados. Esta primera parte de la investigación doctoral coincide con los resultados de la investigación de Ramírez (2013) en el sentido que los profesores, aunque pueden hacer referencias parciales a conceptos de la didáctica de la matemática no lo hacen con la respectiva terminología técnica.

Referencias bibliográficas

Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, *10*(2–3), 241–286.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos: Filosofía y didáctica del infinito matemático.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(1), 33–55.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, *7*(3), 2–8.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational studies in mathematics, 85*(2), 221–239.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII^e^ rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain-la-Neuve.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41, 177–182.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 164–198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques: Etudes dans le cadre de la théorie des situations didactique. *Petit x*, 57, 5–30.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Campolucci, L., Maori, D., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matemática e la sua didattica, 20*(3), 353–400.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, *35*, 90–106.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17*(1), 87–106.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 23–44.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 39–68.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *El número cero: Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más* *misterioso*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contrato"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semántica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica, 19*(2), 139–163.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143–168.

El Bouazzoni, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction* (Tesis de Doctorado). Faculté des Sciences de l'Education, Université Laval, Québec.

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Furinghetti, F. (1996). A theoretical framework for teachers' conceptions. En E. Pehkonen (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs III: Proceedings of the MAVI-3 Workshop* (pp. 19–25). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24–58.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85–116.

Godino, J. D., Batanero, M., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Grigutsch, S. (1998). On pupils' views of mathematics and self-concept: developments, structures and factors of influence. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *The state-of art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities* pp. 169–197). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(5), 411–423.

Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231.

Martínez Padrón, O. J. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, *17*(57), 231–239.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93–166.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21*(2), 265–280.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, *62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. (2001). A hidden regulating factor in mathematics classrooms: mathematics-related beliefs. En M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen, & V. Vatanen (Eds.), *Research on Mathematics and Science Education. From Beliefs to Cognition, from Problem Solving to Understanding* (pp. 11–35). East Lansing, MI: Michigan State University, Institute for Educational Research, University of Jyväskylä.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Röj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagoiska fakulteten, Specialutgåva.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. En M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1–8). Department of Mathematics, University of Pisa.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109–117). Duisburg: Gerhard Mercator University.

Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la matemática de estudiantes de primer curso de matemática: Análisis epistemológico, semiótico y didáctico* (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69–108). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamerica.

Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos* (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61–74.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267–296.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic* *transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesis de Doctorado). Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italia.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57–71.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group 3* on *Students' Difficulties in Calculus*, *ICME-7 1992* (pp. 13–28). Québec, Canada.

Thompson, A. G. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research*. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching (pp. 127–146). New York: Macmillan Publishing Company.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 33–40.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME* (pp. 90–97). Durham, NH.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 213–219.

De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Il motivo per cui è inevitabile considerare l'etica nell'insegnamento-apprendimento della matematica

Luis Radford[1] y Adriana Lasprilla Herrera[2]
[1]*Université Laurentienne, Ontario, Canadá*
[2]*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

Abstract. *In this article we argue that, from the moment that the production and the learning of mathematics are conceived as procedural events that occur in concrete human practice, as suggested by the theory of objectivation, ethics turns out to be an unavoidable element to consider. Our argument is based on a dialectical materialistic conception of mathematics and on a postmodern conception of ethics in which ethics appears as the form of the relation to the Other (the form of alterity), a form that is continuously revealed in the daily action of subjects. In the first part we make a short historical sketch that allows us to situate the question of ethics in contemporary discussions about the teaching of mathematics. In the second part we address the question of the inescapable character of ethics in the teaching and learning of mathematics. In the third part we present an example that comes from a longitudinal study of a mathematics class with 9-10-year-old students in primary education. From this example, reflections are drawn that make it possible to recognize relations between ethics and learning based on forms of social interaction and forms of knowledge circulation in the classroom. We conclude with some reflections on ethics and mathematics education.*

Keywords: ethics, teaching and learning, theory of objectivation, activity, language, otherness.

Sunto. *In questo articolo sosteniamo che, dal momento in cui la produzione e l'apprendimento della matematica si concepiscono come eventi procedurali che si verificano nella pratica umana concreta, come suggerisce la teoria dell'oggettivazione, l'etica si rivela essere un elemento inevitabile da considerare. La nostra argomentazione si basa su una concezione dialettica materialistica della matematica e su una concezione postmoderna dell'etica nella quale essa appare come la forma della relazione all'Altro (la forma dell'alterità), una forma che si rivela continuamente nella quotidianità dell'azione dei soggetti. Nella prima parte presentiamo un breve schema storico che permette di porre la questione dell'etica nelle discussioni contemporanee sull'insegnamento della matematica. Nella seconda parte affrontiamo la questione della natura ineluttabile dell'etica nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Nella terza parte presentiamo un esempio che proviene da uno studio longitudinale di un'attività di matematica con studenti di*

9 e 10 anni nell'ambito dell'educazione primaria. A partire da questo esempio si traggono riflessioni che permettono di riconoscere relazioni tra etica e apprendimento a partire dalle forme di interazione sociale e dalle forme di circolazione del sapere in aula. Concludiamo con alcune riflessioni sull'etica e sull'educazione matematica.

Parole chiave: etica, insegnamento e apprendimento, teoria della oggettivazione, attività, linguaggio, alterità.

Resumen. *En este artículo argüimos que, desde el momento en que la producción y el aprendizaje de las matemáticas se conciben como acontecimientos procesuales que ocurren en la práctica humana concreta, como sugiere la teoría de la objetivación, la ética resulta ser un elemento ineludible de considerar. Nuestro argumento reposa en una concepción dialéctica materialista de las matemáticas y en una concepción postmoderna de la ética en la que ésta aparece como la forma de la relación al Otro (la forma de la alteridad), forma que se desvela continuamente en la cotidianidad de la acción de los sujetos. En la primera parte hacemos un corto esbozo histórico que permite situar la cuestión de la ética en las discusiones contemporáneas sobre la enseñanza de las matemáticas. En la segunda parte abordamos la cuestión del carácter ineludible de la ética en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la tercera parte presentamos un ejemplo que proviene de un estudio longitudinal de una clase de matemáticas con estudiantes de 9 y 10 años en la educación primaria. A partir de este ejemplo se extraen reflexiones que permiten reconocer relaciones entre la ética y el aprendizaje a partir de las formas de interacción social y las formas de circulación de saberes en el aula. Concluimos con unas reflexiones sobre ética y educación matemática.*

Palabras clave: ética, enseñanza y aprendizaje, teoría de la objetivación, actividad, lenguaje, alteridad.

1. Introducción

Las reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han estado, en general, dirigidas a la búsqueda de mecanismos que faciliten el aprendizaje de esta disciplina. Las primeras reflexiones alrededor de fines del siglo 19 y principios del siglo 20, de donde emerge nuestro campo de estudio, se sitúan en torno al currículo que requiere la escuela para responder a las necesidades cada vez mas urgentes de las sociedades que se embarcan en la vía de la industrialización (Radford, 2011).

La preocupación curricular se refina poco a poco a lo largo de la primera mitad del siglo 20, empujada, por un lado, por la idea del respeto a la coherencia conceptual de la disciplina y, por otro lado, por la idea de las matemáticas como potenciadora de saberes para responder a problemas prácticos. Hay, por ejemplo, discusiones alrededor de la escogencia adecuada de las definiciones y de las axiomáticas de la geometría desde el punto de vista de la enseñanza. Tal es el caso de los artículos de Richard (1908), Lebesgue

(1908) y Artin (1963).

Aunque la configuración que toman las matemáticas escolares y las formas de abordar los problemas que plantea su enseñanza se tematizan diferentemente, según los países, el objeto y la justificación de la enseñanza de las matemáticas tiene un denominador común: éste gira en torno a hacer que el estudiante adquiera saberes matemáticos. Evidentemente, el estudiante es considerado y tomado en cuenta, pero esencialmente como *entidad sujetada al saber disciplinario*. En otras palabras, el estudiante es concebido en tanto que entidad general en apropiación de un saber; el estudiante aparece, como dirá Piaget más tarde, en tanto que *sujeto epistémico* (ver Niaz, 1991). Habrá que esperar hasta fines de los años 60 y principios de los 70 para que el estudiante entre de manera orgánica en el discurso educativo (Radford, 2018a). A partir de ese momento, la organización de los contenidos matemáticos pasa a ser pensada no como algo en sí, sino ahora también en función del que aprende. La enseñanza de las matemáticas ya no es vista solamente como un problema de difusión del saber matemático. Aparece ahora la posibilidad de verla desde el punto de vista del sujeto. Y esto es precisamente lo que hace el constructivismo (Cobb, 1985, 1988). Se pasa así del estudiante que es visto como sujeto epistémico al estudiante visto como sujeto cognitivo. Habrá que esperar una reconceptualización del aprendizaje como proceso social, cultural e histórico para que la ética haga irrupción en el discurso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En la sección 2 de este artículo abordamos la cuestión del carácter ineludible de la ética en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Luego presentamos un ejemplo que proviene de un estudio longitudinal de una clase de matemáticas con estudiantes de 9 y 10 años en la educación primaria. A partir de este ejemplo se extraen reflexiones que permiten reconocer relaciones entre la ética y el aprendizaje a partir de las formas de interacción social y las formas de circulación de saberes en el aula. Concluimos con unas reflexiones sobre ética y educación matemática.

2. El carácter ineludible de la ética en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

La pregunta que queremos discutir en esta sección es la siguiente: ¿En qué sentido la ética es ineludible en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? La respuesta a esta pregunta va a depender de la manera en que conceptualizamos tanto la ética como las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje.

2.1. Conceptualizando la ética

Precisamente, por las razones enunciadas en la introducción, la ética sigue siendo un tema poco explorado en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Boylan, 2016). Por el contrario, como podría ser esperado, dicho tema ha atravesado la discusión filosófica desde las civilizaciones antiguas. En dicha discusión, la ética aparece a menudo considerada como sinónimo de la moral. En su libro, *Soi-même comme un autre*, Paul Ricœur dice:

> ¿Qué hay de la distinción propuesta entre ética y moralidad? No hay nada en la etimología o en la historia del uso de los términos que imponga una distinción. Uno viene del griego, el otro del latín; y ambos se refieren a la idea intuitiva de la moralidad (*mœurs*), con la doble connotación que trataremos de desglosar, de lo que se considera *bueno* y lo que se considera *obligatorio*.[1] (Ricoeur, 1990, p. 200; el énfasis es nuestro)

La distinción no es, pues, etimológica. Ésta va a aparecer en el énfasis, en apariencia pequeño, pero en inmenso en la práctica, entre lo bueno y lo obligatorio que subraya Ricœur al final del pasaje anterior. Kant, en el siglo 18, escribe sobre moral, la que en su obra – basada en una concepción del individuo como legislador de sí mismo sujeto a una razón universal, es decir la misma en cualquier tiempo y lugar – adquiere una pretensión normativa universalizante (Radford, 2020). La distinción entre ética y moral empieza a surgir en el trabajo de Hegel, quién poco después que Kant, en sus *Elementos de una teoría del derecho*, dice:

> "Moralidad" [*Moralität*] y "vida ética" [*Sittlichkeit*], que son tal vez normalmente considerados como sinónimos, se toman aquí [en *Elementos de una teoría del derecho*] en sentidos esencialmente diferentes [. . .] Kant generalmente prefiere usar la palabra "moralidad" y, ya que los principios de acción en su filosofía son siempre limitados a esta concepción [es decir una concepción normativa, universalizante], hacen el punto de vista de vida ética completamente imposible, de hecho lo anulan explícitamente y lo rechazan. Aun si "moral" y "ética" significan lo mismo etimológicamente, eso no nos impedirá de ninguna manera, una vez que se entiendan como palabras diferentes, usarlas para diferentes conceptos. (Hegel, 2008, p. 51)

¿Por qué, según Hegel, una concepción normativa de la moral vendría a destruir la posibilidad de la ética? Porque la ética, como él la concibe, está ligada a la acción concreta, siempre situada, realizada frente a una infinidad de posibilidades que se abren al individuo en la cotidianidad de la vida y no como aplicación de normas abstractas. Y es así como la entenderá Vygotsky más tarde (Vygotsky, 1997a). Refiriéndose a la distinción que introduce Hegel en sus *Elementos de una teoría del derecho* entre ética y moral dice de Zan:

> Mediante la introducción de esta convención terminológica quería marcar Hegel la diferencia entre la "eticidad" concreta – realizada como una forma de vida y como el ethos de una comunidad, que es lo que había sido tematizado en la filosofía griega antigua de Platón y de Aristóteles – y el concepto moderno de la

[1] Las traducciones en este artículo son libres.

> "moralidad" como un orden de principios universales, producto de la reflexión de la conciencia sobre la ley moral y el deber de la voluntad autónoma, que es el punto de vista de la ética kantiana. Hegel comprende la eticidad concreta como esencialmente histórica. (de Zan, 2004, pp. 20–21)

Moral y ética, sin embargo, no son excluyentes. Lo que las hace diferentes, es su estrato *ontológico*. Una es *general*; la otra es *singular*. En otros términos, la ética es la encarnación siempre contextual de la moral, su "verdad" como dice Hegel. "La moral y el derecho formal son dos momentos abstractos cuya verdad es sólo la *vida ética*" (Hegel, 2008, p. 52; énfasis en el original). Y con esta última, la acción del individuo *apunta* hacia la *vida plena*. Por tanto, dice Ricœur, "reservaré el término ética para el objetivo de una vida plena y el de moralidad para la articulación de este objetivo en normas caracterizadas tanto por la reivindicación de la universalidad como por un efecto de coacción" (Ricœur, 1990, p. 200).

Retenemos, pues, de esta corta discusión sobre la ética la concepción postmoderna que la concibe como un *punto de mira* que orienta la acción humana concreta. Ricœur usa el término francés *visée*, que incluye elementos como "meta". Pero más que ser la meta o el objetivo de la acción *en sí*, *visée* hace referencia, en el contexto de la ética que propone Ricœur, al *propósito* de la acción, la *mirada*, la *intención naciente* de ésta, apenas o quizás ni siquiera consiente, que *apunta* a algo – a algo "bueno" como insiste Ricœur.

Aunque hemos realizado algún progreso hacia la formulación de la respuesta a la pregunta planteada anteriormente, es decir ¿En qué sentido la ética es ineludible en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?, debemos seguir adelante y volcarnos ahora hacia la cuestión de la conceptualización de las matemáticas.

2.2. Conceptualizando las matemáticas

Si concebimos las matemáticas como un simple cuerpo o colección de aserciones (teoremas, proposiciones, etc.) inmutables que transcienden las culturas y el tiempo, si pensamos las matemáticas como un conjunto de verdades eternas, desencarnadas, como sugiere el platonismo, la ética, en efecto, no tiene nada que hacer ni con las matemáticas ni con su aprendizaje.

Sin embargo, si concebimos las matemáticas como una entidad que no es ni psicológica ni subjetiva, sino histórico y cultural, que es a la vez general y concreta, ideal y sensual, que – como la música – es producida y viene a la existencia solamente a través de la actividad humana, las matemáticas nos aparecen como algo que, en vez de estar supuestamente en los cielos o en la cabeza de la gente, son visuales, táctiles, materiales, simbólicas, gestuales y cinéticas.

Es pensando las matemáticas de esta manera que, en trabajos previos (Radford, 2018b, 2018c) hemos sugerido que las matemáticas pueden ser comprendidas como sistema de sistemas, es decir sistemas histórico-culturales de pensar y de actuar en el mundo, sistemas dinámicos en transformación perpetua los cuales no pueden ser producidos y revelados a la conciencia de los individuos si no es a través de la *actividad humana*, colectiva (Radford, 2019a).

Las aulas de matemáticas se constituyen en formas de actividad humana colectiva de profesores y estudiantes que a través de sus acciones producen y materializan las matemáticas.

Los congresos, los coloquios, los seminarios, los encuentros informales son todos formas de actividad humana colectiva a través de los cuales los matemáticos profesionales *hacen*, producen, oyen, ven, y aprenden matemáticas. Incluso el matemático recluido que escribe solo en su oficina está participando en una *actividad humana colectiva* de producción y aprendizaje de las matemáticas. Cuando en el siglo 18 Leibniz dice que la aritmética y la geometría "pueden ser inventadas en el estudio [del matemático], incluso con los ojos cerrados, sin aprender las verdades que se necesitan con la vista o incluso con el tacto" (Leibniz, 1887, p. 84), Leibniz olvida precisamente que ese matemático recluido está *pensando* a través de un lenguaje que no es solamente suyo, sino un lenguaje histórico, compartido por toda una colectividad, que sea el lenguaje natural o lenguaje simbólico. Y ese matemático está escribiendo para *otros*. Está anticipando las objeciones que le puedan hacer sus colegas; está pensando como organizar mejor las ideas, las deducciones, los detalles, para convencerse no solamente a sí mismo sino también al Otro.

2.2.1. Matemáticas y aprendizaje como procesos relacional y afectivo

Es fácil ver que, desde esta perspectiva – que es la que se elabora en la teoría de la objetivación (Radford, 2020) – las matemáticas, su producción y su enseñanza-aprendizaje no pueden comprenderse sino como procesos *relacionales* y *afectivos* entre colegas, o entre estudiantes y profesores, dado que es solamente a través de la actividad práctica-sensual de éstos que las matemáticas pueden aparecer en el mundo y que se puede llegar a participar, comunicar y vivir la experiencia de las mismas.

2.2.2. La legitimación de saberes matemático

Pero hay aún más. Desde que se abandona la posición universalista de las matemáticas que ha impuesto el pensamiento colonizador y que reduce las matemáticas a una sola, la occidental (Radford, 2019b), el aprendizaje de las matemáticas, como el aprendizaje de toda disciplina, tiene inevitablemente que ver con la *legitimación* de maneras de concebir el mundo.

Estos dos elementos mencionados anteriormente de todo proceso de aprendizaje de las matemáticas – el de ser un proceso *relacional* y *afectivo,* por un lado, y el de ser un proceso *legitimador* de maneras de pensar el mundo – vuelven al aprendizaje un asunto inevitablemente ético.

Podemos ahora regresar a la pregunta que guía esta sección, la pregunta sobre el carácter ineludible de la ética en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por un lado, la ética aparece ineludible dado que, la cuestión de la legitimación de saberes nos conduce a cuestiones de poder y de la posible sujeción del Otro a regímenes de verdad que pueden serle completamente extraños y alienantes. Puede llevar a la asimilación del otro a cánones que se le imponen.

Por otro lado, la cuestión relacional y afectiva estará presente en toda relación entre dos (o más personas). Ésta implica ya una manera de *posicionarse* y de *dirigirse* al otro. Y este posicionamiento relacional es parte de la substancia de la ética. De aquí resulta que toda pedagogía, toda didáctica, está sentada inevitablemente en una ética. Que esto sea de manera implícita o explícitamente no cambia el hecho de la presencia de la ética.

Para aclarar las ideas, demos dos ejemplos. El aprendizaje dentro de la enseñanza tradicional está sentado en la ética de la obediencia. La relación del profesor al estudiante es una relación de sumisión y de acatamiento. Sin ésta, el aula de una enseñanza tradicional no podría funcionar. De manera similar, el aprendizaje en el modelo constructivista está sentado en una ética. Ésta no es la de la obediencia. De acuerdo con el proyecto humanista del Siglo de las Luces, la ética constructivista es la de la autonomía y la libertad del estudiante.

A partir de los elementos anteriores, podemos empezar a ver que, desde que las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje son vistos como entidades y procesos que no pueden existir afuera de relaciones humanas que vienen a cobrar vida en la actividad concreta de individuos ya no considerados ni epistémicos ni cognitivos sino concretos, es decir, individuos que respiran, sudan, sufren, se hablan, se ayudan (o no), la ética empieza a tomar un carácter ineludible en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, esta aparece en la manera en que me posiciono frente a la circulación del saber y en la manera en que yo posiciono al otro.

En la teoría de la objetivación, la postura ética que se propone se inspira de Spinoza (1989), Vygtosky (1997b; ver también Clot, 2015) y Lévinas (1977, 1982) y se desarrolla alrededor de una concepción del ser como entidad en profunda dependencia con la alteridad.

3. Ser, subjetividad, alteridad

Y es que, en la teoría de la objetivación, el ser y la subjetividad llevan consigo, de manera nodal, la idea de alteridad, cuyo sentido más profundo es la acción constitutiva del otro en mi propio ser. Esta es la idea de base de la ética que propone Emmanuel Lévinas, donde la interioridad del sujeto es topológicamente situada en el exterior. Es una interioridad que es exterioridad como un otro infinito. El “otro” es una exigencia primera que se impone desde sí, es “una solicitud que me toca desde su miseria y desde su grandeza” (Lévinas, 1977, p. 213).

Ahora bien, si Lévinas plantea la relación al otro como una relación ontológica que precede a los elementos de la relación, es decir, al uno y al otro, Vološinov (1973) y Bajtín (1999) llaman la atención sobre la importancia que cobra el lenguaje en la relación de alteridad. Nacemos en la cultura a través del otro/otra que nos nombra. “La conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena” (Bajtín, 1999, p. 360). Bajtín señala que los seres humanos constituyen su individualidad desde el otro, desde sus acciones y discurso en un proceso que se inicia desde el nacimiento y que se continúa con la temprana adquisición del lenguaje, desarrollándose a lo largo de la vida.

Para entender el papel del lenguaje en el campo de la ética, es necesario pensar al lenguaje más allá de su dimensión cognitiva o racional. La historia del pensamiento occidental muestra que se tienen por lo menos dos formas de concebir el lenguaje: el objetivismo abstracto – como aparece, por ejemplo, en la obra de Arnauld y Lancelot (1803) – y el subjetivismo individualista (ver Formigari, 1988). En el primero, el sujeto habla a un otro extranjero; el lenguaje opera denotativamente: sirve para indicar o referirse a algo por medio de la palabra o del símbolo. La otredad queda intacta, desafectada por el lenguaje. En el segundo, el referente es una producción subjetiva del sujeto. El lenguaje opera enclaustrado en la esfera solipsista del ser (Radford, 2018d). En la teoría de la objetivación, se propone una nueva forma de conceptualizar al lenguaje a partir de los planteamientos dialéctico-materialistas que fundamentan a la teoría. Se piensa el lenguaje como interacción verbal de carácter relacional. Como lo expresa Vološinov, “Una palabra es el medio más puro y sensible de las relaciones sociales” (Vološinov, 1973, p. 14). “Lo importante de la palabra a este respecto no es tanto la pureza de su signo como su *ubicuidad social*. La palabra está implicada literalmente en todos y cada uno de los actos o contactos entre personas” (p. 19). El lenguaje pasa a ser visto como un sistema histórico-cultural cuyo papel va más allá de simple mediador. El lenguaje se convierte en un sistema semiótico activo que permite la configuración, organización y potenciación de la conciencia y de la acción (Vygotsky, 1987, 1997a, 1997b), al mismo tiempo que permite la relación con otros y la constitución de la propia subjetividad. “El signo surge como una relación en la que una persona actúa sobre otra, y solo posteriormente sirve como un medio para actuar sobre uno mismo” (Roth, 2018, p. 44).

Por tanto, conceptualizar de este modo el lenguaje – es decir no como lenguaje abstracto ni solipsista, sino como lenguaje-en-la actividad-humana, y por ende como fundamento de la alteridad y la ética – nos lleva a reconocer un vínculo ineludible entre el lenguaje y la cultura. Es, en efecto, en y a través del lenguaje-en-la actividad-humana que el sujeto encuentra las fuentes del pensamiento y los rasgos constitutivos de la relación ética, constituyéndose así en un ser cultural. En su naturaleza relacional, el lenguaje-en-la actividad-humana posibilita la comunicación y el reconocimiento mutuo de dos conciencias (Radford, 2018d).

Para resumir, una comprensión dialógica e intersubjetiva de la ética la hace aparecer necesariamente en el aprendizaje, dada la naturaleza relacional de este último. El punto, sin embargo, no es simplemente reconocer su naturaleza relacional – lo que en cierto modo ha concluido incluso el propio constructivismo (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997) – sino de reconocer que la relación al otro opera siempre bajo parámetros éticos. Solamente en la comunicación entre dos computadoras, la relación es puramente *a*ética. La relación ética humana es indisociable de la alteridad y de la manera en que nos coproducimos como sujetos, es decir como subjetividades.

Ahora bien, más allá de su presencia ontológica sobre la que Lévinas llama nuestra atención, la ética no opera independientemente de la historia y la cultura. Al traer a discusión el lenguaje en las reflexiones sobre la ética, Vološinov nos recuerda que la relación al otro (y por tanto la ética) es de naturaleza histórico-cultural. Pero por el hecho mismo que las culturas son siempre heterogéneas, zonas de encuentro de vistas en conflicto, zonas de contradicción y oposición, en toda cultura circulan éticas diversas.

Si bien es cierto que la ética, la alteridad y la subjetividad son entidades dinámicas en constante relación dialéctica, que se constituyen mutuamente de manera procesual en la actividad humana, cabe preguntarse ¿cuáles son aquellas éticas que operan en la escuela?

Sin intentar abordar la pregunta anterior en su totalidad, en lo que sigue de este artículo nos limitaremos a presentar un análisis de episodios de una escuela en Bogotá, Colombia, con un grupo de estudiantes de 9 y 10 años de educación primaria al resolver tareas matemáticas de generalización de patrones. El análisis se hace a partir de los datos obtenidos en el marco de una investigación doctoral desarrollada en un colegio de carácter público en Bogotá, Colombia. El episodio seleccionado hace parte del desarrollo de una de las tareas, de un total de seis tareas implementadas. Los datos fueron obtenidos a través de grabaciones video y audio, las cuales fueron transcritas y luego analizadas a través del programa NVivo.

Al final del artículo ofrecemos algunas reflexiones sobre aspectos éticos que emergieron durante el desarrollo de la actividad y que dan cuenta, a través de un proceso de navegación de datos, de formas de interacción entre los estudiantes y de su ética subyacente.

4. Un ejemplo: ¿Qué ética opera en el aula?

Se muestra en la figura 1 la secuencia propuesta a los estudiantes. Se les propuso que abordaran los enunciados 1, 2 y 3 de 6 propuestos en la tarea. El primer enunciado decía: dibuje los términos 5 y 6. El segundo: calcule el número de círculos en el término 9, sin construirlo y explique el procedimiento seguido. El tercer enunciado decía: calcule el número de círculos del término 100 y explique el camino seguido.

Término 1 Término 2 Término 3

Figura 1. Secuencia propuesta a los niños.

La clase fue dividida en pequeños grupos. La transcripción seleccionada para este escrito es de uno de los grupos conformado por dos niñas y un niño, del total de 38 estudiantes que tenía el curso en el que se desarrolló la investigación. Era la primera vez que trabajaban juntos los tres niños, ya que en la anterior tarea propuesta las niñas trabajaron las dos solas, pero para esta sesión el niño quedó sin grupo así que ellas decidieron acogerlo.

106 Jennifer: (*dirigiéndose a la profesora*) ¿cómo vamos a hacer el del [término] 100?
107 Profesora: ¿señora?
108 Jennifer: ¿cómo vamos a hacer el del 100?
109 Profesora: por eso, empieza a mirar (*se dirige a otro grupo*).
110 Jennifer: vaya escribiendo cien bolitas aquí (*le dice a Fabián sonriendo y señala su cuaderno*).
111 Fabián: ¡cien bolitas! (*Nicole toma el cuaderno de Fabián para mirar lo que él dibujaba luego lo toma Jennifer y se lo regresa a Fabián*).

En la línea 106, Jennifer pide a la profesora que le diga cómo deben hacer para encontrar la cantidad de círculos en el término 100. La niña plantea la pregunta a la profesora tan pronto la profesora termina de explicar en qué consiste la tarea que los estudiantes tienen que realizar. Con su intervención, Jennifer parece dar a entender que, para ella, incumbe a la profesora la responsabilidad de indicar los procedimientos que los estudiantes deben seguir; la responsabilidad de los estudiantes sería ejecutar dichos procedimientos. Jennifer muestra con su pregunta la conceptualización que tiene de las formas de producción del saber en el aula. De acuerdo con esta concepción, es la profesora quien realiza la instrucción y la estudiante la aplicación. Con su intervención, la profesora da a entender que la responsabilidad de la indagación de la pregunta es incumbencia de la estudiante. En efecto, en la línea 109, la profesora invita a Jennifer a que empiece a indagar de qué manera puede responder la pregunta, sin dar respuestas respecto a los procedimientos que Jennifer pide que le explique. La profesora le dice "por eso empieza a mirar". La actividad empieza, pues, con una tensión respecto a la manera en que Jennifer y la profesora comprenden su responsabilidad respecto a los saberes en juego.

Jennifer no sabe de qué manera proceder, así que le dice a Fabián que dibuje 100 bolas en su cuaderno. El niño asume que el hacerlo ayudará al trabajo que deben desarrollar en grupo y se dispone a hacerlo.

Luego de un tiempo, Jennifer responde de manera individual a la primera pregunta, mientras Nicole la observa a ella y a Fabián. Nicole comenta en voz alta que el niño hizo 100 círculos en su cuaderno, sobre lo cual Jennifer sonríe. Para Nicole no es claro si lo que hace el niño tiene que ver o no con el desarrollo de la tarea; ella no se ha implicado en la tarea y ha delegado a Jennifer la responsabilidad de realizarla. Por ello, Nicole se limita a observar lo que hacen sus dos compañeros y hace mofa de Fabián.

119 Nicole: ¡uish! este [Fabián] hizo cien bolas (*mirando el cuaderno de Fabián*).
120 Jennifer: (*abre sus ojos y mira el cuaderno de Fabián con sorpresa*) sí, sí bueno. Hágale 100 bolas (*ella y Nicole se sonríen y lo observan por un momento*).
121 Nicole: 90, 100, 110, 120, 130, 140.
122 Fabián: yo contando 60, 60 60 (*Nicole se ríe*) y me perdí por la culpa de ella (*mueve su mano como si simulara darle un puñetazo* (*y todos ríen*).

En las imágenes (Figura 2), Fabián simula dar un puñetazo a Nicole por que ella no le deja contar. Nicole dice, en efecto, “90, 100, 110, 120, 130, 140” en voz alta para propiciar que Fabián se confunda y no pueda continuar con su conteo.

Simular golpes entre ellos es una forma normalizada de juego. A pesar de que no hay contacto físico, sí hay una intención de agredir al otro por hacer algo que no gusta; esta acción agresiva es en general tomada en tono de broma.

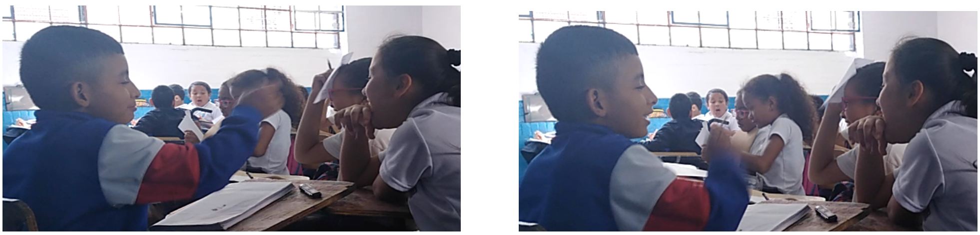

Figura 2. Fabián simulando dar un puñetazo a Nicole.

123 Jennifer: ¡de nuevo!, ¡de nuevo ¡(*tocando el cuaderno de Fabián, invitándolo a continuar con el conteo*.
124 Fabián: uno, dos, ... (*Mariana – una estudiante de otro grupo – lo interrumpe*).
125 Nicole: 20, 30.
126 Jennifer: (*Jennifer cuenta los círculos de la fotocopia*) cuando haga cien

dibuje dos más. (*dirigiéndose a Fabián*). Ciento dos. (*Ella y Nicole observan a Fabián por un momento. Él sigue dibujando círculos, así que ella decide hacer círculos en el cuaderno de él; Fabián le quita el lápiz*) ah no, pero ¿porqué anda dibujando cien bolitas? si eso no es así.

127 Fabián: cuarenta.
128 Nicole: ¿cuánto?
129 Jennifer: no mijo, ¡se le va a ir toda la hoja!
130 Nicole: (*dirigiéndose a Fabián*) ¿cuántas lleva? (*él continúa dibujando en su cuaderno. Nicole abraza a Jennifer y le hace cosquillas y juntas se ríen un momento*. *Fabián coloca su cuaderno en el puesto de Jennifer*).

Cuando Jennifer ve que el niño siguió la instrucción que ella le dio, le dice en la línea 126 que cuando haga cien, "dibuje dos más". Ella ha observado que entre un término de la secuencia y el siguiente hay dos bolitas de diferencia. Luego intenta hacer círculos en el cuaderno de Fabián, acción que Fabián detiene quitándole el lápiz. En este momento Jennifer reacciona diciéndole por qué hace eso, si así no es (línea 126), pero no se preocupa por aclararle o mostrarle porqué no es como él está haciendo. En este momento es claro que a Jennifer poco le interesa que su compañero lleve a cabo una acción que no será de ninguna utilidad y lo deja continuar; en la línea 129 le dice que se le va a ir toda la hoja.

131 Fabián: cuente (*El niño ha terminado de dibujar las 100 bolitas y coloca su cuaderno en el puesto de Jennifer que fue quien le dijo que las hiciera*).
132 Nicole: yo cuento (*coge el cuaderno y empieza a contar señalando con su dedo*) 1, 2, 3.
133 Jennifer: ¿pero para qué? ¡Si así no es!
134 Nicole: (*continúa contando con el lápiz de Fabián mientras Fabián toma la grabadora de audio que esta sobre el puesto y la coloca en las caras de las niñas por un momento, las niñas sonríen por ello*) listo. Ya están las cien bolas.
135 Fabián: ya están las cien bolitas (*empieza a contar y dibuja dos más*).
136 Nicole: pero. ¿para qué va a hacer más?
137 Fabián: listo. Ciento dos (*dibuja dos círculos más*).
138 Jennifer: ¡usted no tenía que hacer eso!
139 Fabián: usted dijo que ciento dos (*levanta su cuaderno como si quiera golpearla con él, ver Figura 3*).
140 Jennifer: o sea, perdió todo el tiempo (*Nicole se ríe*).
141 Nicole: (*dirigiéndose a Fabián*) yo le dije que no escribiera nada en el cuaderno, pero como no hace caso...
142 Fabián: (s*eñalando a Jennifer*) ella me dijo que hiciera cien bolitas (*mientras Fabián y Nicole hablan de las bolitas que él dibujó, Jennifer cuenta con sus dedos la cantidad de círculos que debe tener los siguientes términos*).

En la línea 131, Fabián solicita la aprobación de Jennifer frente a lo que él ha hecho. Nicole responde ofreciéndose a contar. En la línea 138 Jennifer insiste en que el niño no debía realizar esa actividad, pero no ofrece una explicación; tampoco se evidencia una intención de parte de ella que muestre que tiene un interés en explicar a sus compañeros por qué la pregunta no se responde de esa manera. Nicole por su parte se limita a contar los círculos, poniendo en evidencia que ella tampoco sabe de qué se trata la tarea y no ve ningún problema en revisar lo que su compañero hizo.

Figura 3. Fabián simulando golpear a Jennifer con su cuaderno.

Jennifer insiste a Fabián que no debía hacer lo que hizo, pero continúa desarrollando los puntos de la tarea sin comentarlo con los compañeros. Como aparentemente Nicole no sabe de qué se trata la tarea, simplemente opta por apoyar a Jennifer en la idea de que no debía realizar esos círculos. Se burla del compañero por hacer algo que no era necesario, pero que bien podría haber hecho ella también, ya que no se mostraba implicada en la tarea y no mostró ningún interés por apoyar lo que Jennifer hacía. Sin embargo, sí estuvo pendiente de lo que Fabián hacía aún cuando no sabía por qué este lo hacía. Así que se burla del niño y además llama a la profesora para contarle lo que hizo el compañero.

La profesora parece no entender la intención de la niña y la razón por la que el niño hizo los 102 círculos; pero en ese momento es abordada por otro niño y pierde la atención de lo que estaba sucediendo dentro del grupo. El diálogo continúa como se muestra a continuación.

143 Nicole: profe, Fabián dibujó cien bolitas, ciento dos bolitas (*se ríe mientras lo dice*).
144 profesora: y en el [término] cien ¿hay cien bolitas? *(hace gestos de desconcierto*).
145 Nicole: él dice.
146 Jennifer: él dice (*en este momento un niño de otro grupo aborda a la profesora solicitando destapar una botella de agua, la profesora pierde la atención sobre lo que sucede en el grupo*).
147 Fabián: ella me dijo que dibujara 100 (*señalando a Jennifer*).
148 Jennifer: ¡usted es como bobo!

149 Fabián: usted dijo cuando termine de dibujar 100 bolitas dibuje dos bolitas más, ciento dos bolitas (*las dos niñas se ríen*).

150 Nicole: cuando iba en el siete, si-e-te para que quedaran 102 bolas (*Fabián empieza a borrar en su cuaderno y Nicole le da palmadas en la cabeza a Fabián (ver figura 4); Jennifer continúa realizando la actividad en la hoja de manera individual*) qué pecadito; Fabián se puso a hacer cien bolas para nada.

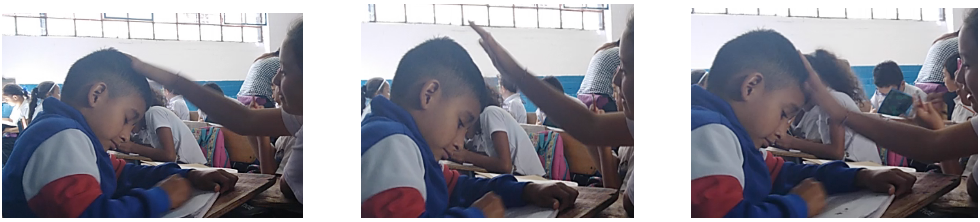

Figura 4. Nicole consolando a Fabián en tono de burla.

Para la profesora no es claro por qué la niña le llama para mostrarle que el compañero hizo 100 bolitas; por ello pregunta en la línea 144 si en el término cien hay 100 bolitas. Pero la respuesta de las niñas es "él dice", buscando despojarse de toda responsabilidad sobre lo que el niño hizo. El niño muestra su molestia con las niñas por burlarse de lo que él hizo. Es cierto que Jennifer indicó en varias oportunidades (líneas 133 y 138) que no era necesario que dibujara los 100 círculos, pero a pesar de que llamó la atención sobre ello, no prestó mucha importancia de que lo hiciera. Como aparentemente Nicole no sabía si servía de algo o no que lo hiciera, ella se interesó en contar los círculos que hizo Fabián; pero cuando Jennifer insistió en que no servía para nada, optó por burlarse del niño, aún cuando ella también creyó que lo que el niño hacía ayudaba al desarrollo de la tarea. Luego Jennifer le dice bobo a Fabián (línea 148) por hacer algo que no servía para el desarrollo de la tarea aún cuando fue ella quien le dijo que lo hiciera.

151 Fabián: ¿cuántas bolas necesita? [para el término 100] (*mientras Fabián borra sus dibujos de bolitas hace esa pregunta, tal vez pensando que aún puede ser de utilidad dibujar alguna cantidad de bolitas; pero Jennifer y Nicole no le contestan*).

152 Nicole: nos tiene que decir a todos porqué. ¿Qué tal si nos pasa lo de los otros y nosotros… No profe, es que Jennifer hizo todo sola, no sabemos nada.

153 Jennifer: no pues yo le digo. Profe, yo les dije, pero ellos no quisieron [escuchar].

154 Nicole: no sea mentirosa (*mueve su cabeza negando y se levanta de su puesto mirando la hoja de Jennifer*).

155 Jennifer: no, mentiras.

156 Nicole: ¿cuánto son en el término cinco?

157 Jennifer: en el término cinco hay trece.

158 Nicole: ¡trece! (*con voz de sorprendida.*) Profe (*que se encontraba hablando con el niño del puesto de atrás de Nicole*), en el término cinco, nos da trece (*la profe asiente con la cabeza*) ¿Son trece? (*la profe mueve la cabeza de forma afirmativa; mientras ellas hablan, Fabián dibuja círculos en su cuaderno*) yo no quiero que me pasen [al tablero], profe. ¿Tenemos que pasar?

Finalmente, Nicole se interesa por la tarea que deben desarrollar y le pregunta a Jennifer por las respuestas. Sin embargo, como lo muestra la línea 152, lo que le preocupa es que deba pasar al tablero y no sepa qué decir. Su preocupación está en poder dar una respuesta acertada, más que en entender en qué consiste la tarea. Cuando la compañera le responde la cantidad del término cinco, ella indaga con la profesora sobre este valor. La pregunta conlleva dos intenciones: primero, que la profesora vea que ella está haciendo la tarea y, segundo, verificar la veracidad de lo que su compañera dijo. Durante la última parte de este episodio Fabián permanece borrando, colocando la grabadora de voz en las caras de las niñas y observando cómo Jennifer y Nicole dialogan, pero él no participa en el desarrollo de la tarea.

5. Ética y aprendizaje

Desde la perspectiva Leviniana que esbozamos anteriormente, el ser y la subjetividad llevan consigo, de manera nodal, la idea de la otredad. Dijimos que su sentido más profundo consiste en reconocer en la otredad la acción constitutiva del otro y de lo otro en mi propio ser, acción no solamente como movimiento sino también como presencia: una presencia que me confronta y me interpela y, en esta interpelación, me posiciona histórica y culturalmente.

Viendo desde esta perspectiva teórica los episodios presentados anteriormente, nos damos cuenta que la relación a la otredad se enmarca dentro de una actividad, en este caso, la actividad de enseñanza y aprendizaje. Dicha actividad reposaba en lo que en principio debía ser un trabajo conjunto para responder colectivamente a una serie de preguntas sobre la investigación matemática de una secuencia aritmética elemental.

Siguiendo esta línea de pensamiento, la profesora había elaborado una tarea que consistía en una serie de preguntas de complejidad creciente (Radford, 2015). Se esperaba que la investigación matemática sobre dichas preguntas permitiría a los estudiantes encontrar formas de pensamiento algebraico constituidas histórico-culturalmente. Claro, no esperábamos que los niños hicieran todo el trabajo por ellos mismos. Por ejemplo, la idea de discutir las soluciones propuestas por los diferentes grupos en la pizarra daría pautas para reconocer criterios colectivos entre estudiantes y la profesora que indicarían las fuerzas y límites de las soluciones propuestas, su generalización y, eventualmente, alcanzar así a reconocer los procedimientos algebraicos de generalización.

Lo que los episodios ponen de manifiesto es la relación a la otredad que los estudiantes ponen en juego. En particular, la relación al saber está modulada por *formas de circulación de saberes* que entran en contradicción con las que la profesora, con su proyecto didáctico, tenía en mente. Es eso lo que observamos desde las primeras líneas.

Por un lado, en efecto, los datos sugieren, como vimos anteriormente, que los estudiantes *esperan* que la profesora explique cómo resolver los problemas. La relación al saber y sus formas de circulación en el aula, desde el punto de vista de los estudiantes, son asumidos como *responsabilidad* de la profesora. Ante los ojos de los estudiantes, la profesora encarna el poder y la verdad. De allí la necesidad que sienten los estudiantes de preguntar al profesor constantemente si está bien lo que van haciendo (ver línea 108 y 158).

Por el otro lado, la profesora *espera* que los estudiantes generen ideas colectivamente, que las discutan entre ellos. La relación al saber y su circulación en el aula son asumidos como responsabilidad de los estudiantes. De allí que la profesora invite a los estudiantes a *mirar* la secuencia y dice: "empieza a mirar" (línea 109). Para mantenerse fiel a su proyecto, la profesora no puede decirles ni *qué* mirar, ni *cómo* mirarlo. Pero tampoco espera necesariamente que los estudiantes lo hagan por ellos mismos. La idea es que por lo menos los estudiantes empiecen a generar ideas para discutirlas.

Dejados a su propia iniciativa, los estudiantes empiezan a trabajar en la pregunta 3, que es la pregunta sobre el término 100. Los datos indican que los estudiantes no logran organizarse como equipo para conducir la investigación matemática. En vez de trabajar en equipo, Jennifer asume una posición de poder. Dice a Fabián: "vaya escribiendo cien bolitas aquí" (línea 110). En la línea 111, Fabián repite "cien bolitas" y se pone a dibujarlas. La relación Jennifer-Fabián es, como toda relación humana, una relación ética. Aquí, esta ética reproduce la ética Profesor-Jennifer de las líneas 106-109, es decir la ética de poder/sumisión.

Para poder entender esta ética (o cualquier otra), es necesario entender que el poder no es algo substancial, no es una cosa que se posee o no, sino una *relación*, una relación fluida, dinámica, entre humanos (Foucault, 1980). El poder de A sobre B no reside *en* el sujeto A. No es tampoco la carencia de poder *en* B. Para que A pueda ejercer un poder, B debe *someterse* a A en una relación asimétrica. Evidentemente, los procesos de sujeción o subordinación pueden tomar muchos matices, desde una forma física brutal, hasta formas muy sutiles que escapan a primera vista, como en el caso de Jennifer y Fabián, donde la subordinación se hace de manera discursiva. Parecería sorprendente que dicha relación aparece sin ninguna objeción, como si fuese algo natural. Y, en efecto, lo es. Es naturalizada en la sociedad a través de sus prácticas cotidianas; los estudiantes no hacen más que transponerlas e importarlas a la escuela.

El ejercicio del poder permite a Jennifer posicionarse ante su equipo de cierta manera; al mismo tiempo, ese ejercicio del poder permite a los otros dos estudiantes posicionarse ante su equipo a través de toma de lugares diferentes. Los posicionamientos de los estudiantes se reflejan, en particular, (1) en la actitud que toman respecto a la tarea, y (2) en cómo perciben su participación en la realización de esta.

Jennifer ha estado intentando dar solución a la tarea desde el inicio de la sesión de manera individual. En la línea 152, Nicole le solicita a Jennifer que le dé las respuestas; ella se siente obligada de conocer las respuestas por la presión de tener probablemente que pasar al tablero. Nicole también pregunta a la profesora sobre la respuesta que le propone Jennifer, mostrando con esta acción su interés en que la profesora reconozca su implicación en el trabajo. Por su lado, Fabián dibuja en su cuaderno los círculos, esperando con ello aportar al trabajo que hace Jennifer; por ello, en la línea 151, le pregunta a Jennifer por la cantidad de círculos que necesita, pero su llamado es ignorado dado que Jennifer y Nicole están hablando entre ellas dos.

Así, en términos del posicionamiento general que adoptan los estudiantes, Jennifer se coloca en posición jerárquica. Mientras que Fabián sigue las instrucciones de Jennifer, Nicole parece situarse entre los dos: sigue a Jennifer, pero no pierde ocasión para desmerecer el trabajo de Fabián. En la línea 121, Nicole cuenta en voz alta para perturbar el proceso de conteo en que se ha embarcado Fabián. Para distraerlo dice "90, 100, 110, 120, 130, 140". Nicole se ríe cuando Fabián dice "y me perdí por la culpa de ella". Y es en este momento en que mueve su mano, simulando darle un puño.

A lo largo de la lección, los tres estudiantes no logran conformarse en equipo en el sentido preciso del término. No hay un objeto *común* que los amarre. Leont'ev (1978) afirmaba que toda actividad humana está caracterizada por su *objeto*. El *objeto* es lo que mueve la actividad en cierta dirección. A ese objeto está ligado un *motivo*. El objeto para los estudiantes es responder a las preguntas planteadas en la tarea propuesta por la profesora. El *motivo* aparece como simplemente cumplir con el *deber* de responder a las preguntas de la profesora. El resultado es el ejercicio de una actividad en que tres conciencias se oponen e imponen/someten unas a otras. Los estudiantes no logran crear un *compromiso (commitment)* mutuo en su abordaje de la tarea. Nicole, por ejemplo, muestra interés por conocer las respuestas, pero ese interés deriva simplemente del miedo que le representa pasar frente a la clase a contar lo que realizaron. Vemos, de nuevo, aparecer la concepción de sumisión ante el saber y sus formas de circulación en el aula. Pasar al frente no es percibido como una contribución a la colectividad, para que la colectividad opine cómo mejorar las ideas presentadas. No es percibido como un acto generoso. Es percibido como un acto aterrador, pues en él, la niña se expondría a la crítica de los otros. El aula es percibida como un ambiente hostil.

6. Reflexiones finales

En este artículo intentamos abordar la pregunta acerca del carácter ineludible de la ética en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Nuestra intención fue ofrecer un abordaje exploratorio, apoyándonos en datos que provienen de una clase de una escuela pública en Bogotá, Colombia. Indudablemente, lo que logramos interpretar no se aplica necesariamente a otras clases. Nos parece importante, a pesar de los límites de nuestro estudio, señalar resultados y análisis que podrían eventualmente ser pertinentes en otras investigaciones.

La ética, por razones que expusimos en la introducción, no ha sido un tema de mucha vigencia en la educación matemática (algunas excepciones son Abtahi et al., 2018; Ernest, 2009; Maheux & Roth, 2014). Hemos argüido que una concepción de las matemáticas no como formas platónicas sino como actividad humana lleva de manera inevitable a la cuestión de la ética, pues la actividad matemática implica una *relación* entre aquellos sujetos inmersos en dicha actividad y una relación de legitimación de contenidos disciplinarios. Evidentemente, esto es mucho más patente en el caso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en donde los estudiantes y el profesor están siempre interactuando unos con otros (incluso en el caso de la enseñanza tradicional).

Para llevar a cabo nuestro estudio, nos hemos avocado a la teoría de la objetivación y a su aproximación ética Leviniana.

Dentro de esta teoría, las relaciones humanas ocurren en el marco de una actividad, la cual está sustentada por dos ejes: las formas de circulación de saberes y las formas de colaboración humana (Radford, 2012). Estos dos ejes están íntimamente relacionados; nosotros los dividimos por fines de simplificación de análisis. En el ejemplo que hemos discutido aquí, hemos visto que la profesora conformó una tarea sobre generalización de secuencias cuyo objeto era llevar a los estudiantes a proponer ideas para ser discutidas colectivamente. Para fomentar las discusiones, la profesora dividió la clase en pequeños grupos. Está acción de la profesora se enmarca ya en el eje de las formas de colaboración humana.

Un resultado de esta investigación es el siguiente: no es suficiente ofrecer a los estudiantes una estructura en pequeños grupos para hacer avanzar las formas de circulación de saberes. En efecto, como hemos visto, al cambiar la configuración topográfica de la clase, es decir al pasar de la configuración cartesiana (que ubica a los estudiantes en filas y columnas, permitiendo así una vigilancia y control óptimo de los sujetos) a una configuración de grupos relativamente autónomos, los estudiantes se apegan a una ética en donde la relación a la otredad es alienante: se trata de una ética de superior/inferior, potentado/vasallo, potente/impotente, conocedor/ignorante, autoridad/súbdito, que no va sin recordarnos la ética del opresor y del oprimido en los trabajos de Freire (2005) que, no por azar, partían de la dialéctica entre el maestro y el esclavo examinada por Hegel. El profesor es conceptualizado como poseedor del saber y del poder. El estudiante se conceptualiza él mismo como sumiso al profesor y su saber (incluso cuando el profesor intenta conceptualizarlo de otra manera). Evidentemente, esta ética limita la calidad de la práctica de las matemáticas y de la manera en que los estudiantes se posicionan respecto a esas matemáticas.

Hemos visto que las formas de producción del saber y los modos de interacción a los que los estudiantes se aferran hacen resistencia a las formas que la profesora pretende introducir en el aula. La profesora plantea un trabajo en grupos, en donde mediante discusiones lleguen a acuerdos que les permitan dar solución a la tarea propuesta; la profesora plantea también discusiones generales para que diferentes grupos comenten a todo el curso sus alcances. Sin embargo, los niños trabajan de maneras individualistas y se resisten a colaborar entre ellos y a realizar participaciones orales frente a sus otros compañeros. Con esa resistencia, los estudiantes muestran una adhesión a lo conocido, en donde encuentran un espacio de seguridad. Esta resistencia es un aspecto importante de considerar cuando se pretende introducir formas colectivas de colaboración en el aula.

Dos preguntas que se desprenden del análisis anterior son las siguientes:

- ¿Cómo hacer para transitar de una ética de la lucha por el reconocimiento y la dominación a una ética entendida como diálogo de voces donde los participantes se oyen, se escuchan, se toman en cuenta y se responden?
- ¿Qué acciones pedagógicas podrían conducir a modificar las formas de colaboración humana de manera que éstas vengan a reposar en una ética de solidaridad, es decir una ética de labor conjunta genuina?

Sin duda, estas son preguntas todavía abiertas que requieren más investigación y reflexión. Es claro que la respuesta no reside en imponer un código de conducta en el aula. Como lo indica Jeffrey Nealon,

> Según Lévinas, no son los sistemas abstractos de obligación los que dan un grosor a la vida ética humana; más bien, la ética nace y se mantiene a través de la necesidad de dar *respuesta* a la otra persona, y esa capacidad de dar tal respuesta (que Lévinas llama “responsabilidad”) viene necesariamente *antes* de la solidificación de las reglas teóricas o las normas políticas de conducta ética. (Nealon, 1997, p. 131)

La importancia de las dos preguntas anteriores radica en que las matemáticas escolares son matemáticas que se practican *con otros*; su calidad pasa, pues, por una ética. En la medida que esta ética no permita una acción profunda interactiva con otros, esas matemáticas, los aprendizajes que de ellas puedan hacer los estudiantes y las subjetividades que en ese aprendizaje puedan conformarse y producirse, se verán muy limitados.

Reconocimientos

Agradecemos al *Emerging Leaders in the Americas Program* (ELAP) de Canadá por la beca suministrada a A. Lasprilla Herrera para efectuar una estancia doctoral en la Université Laurentienne en 2019. Agradecemos igualmente al Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH), quien ha ofrecido las subvenciones necesarias para el desarrollo de la teoría de la objetivación. Una versión anterior de este artículo apareció en Radford y Lasprilla Herrera (En prensa).

Referencias bibliográficas

Abtahi, Y., Adler, J., Guillemette, D., Herheim, R., Lerman, S., Maheux, J.-F., & Valero, P. (2018). Otherness in mathematics education. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95-123). Umeå, Sweden: PME.

Arnauld, A., & Lancelot, C. (1803). *Grammaire générale et raisonnée de Port-Royal*. Paris: Perlet.

Artin, E. (1963). Les points de vue extrêmes sur l'enseignement de la géométrie. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 1–4.

Bajtín, M. M. (1999). *Estética de la creación verbal*. Madrid: Siglo XXI Editores.

Boylan, M. (2016). Ethical dimensions of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 92*(3), 395–409.

Clot, Y. (2015). Vygotski avec Spinoza, au-delà de Freud. *Revue philosophique de la France et de l'étranger, 140*(2), 205–224.

Cobb, P. (1985). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 109–124.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, *23*(2), 87–103.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258–277.

de Zan, J. (2004). *La ética, los derechos y la justicia*. Montevideo, Uruguay: Fundación Konrad-Adenauer.

Ernest, P. (2009). What is 'first philosophy' in mathematics education? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis, (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25–42). Thessaloniki, Greece: PME.

Formigari, L. (1988). De l'idéalisme dans les théories du langage: Histoire d'une transition. *Histoire Épistémologie Langage*, *10*(1), 59–80.

Foucault, M. (1980). Power/knowledge. New York: Pantheon.

Freire, P. (2005). *The pedagogy of the oppressed*. New York: Continuum.

Hegel, G. W. F. (2008). *Outlines of the philosophy of right*. Oxford: Oxford University Press.

Lebesgue, H. (1908). Sur la définition de l'aire des surfaces. *L'Enseignement*

Mathématique, *10*, 212–220.

Leibniz, G. W. (1887). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Paris: Poussielgue Frères.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Lévinas, E. (1977). *Totalidad e infinito: Ensayo sobre la exterioridad.* Salamanca: Sígueme.

Lévinas, E. (1982). *Éthique et infini*. Paris: Fayard.

Maheux, J.-F., & Roth, M.-W. (2014). The relationality in/of teacher-student communication. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(3), 503–529.

Nealon, J. (1997). The ethics of dialogue: Bakhtin and Levinas. *College English*, *59*(2), 129–148.

Niaz, M. (1991). Role of the epistemic subject in Piaget's genetic epistemology and its importance for science education. *Journal of Research in Science Teaching*, *28*(7), 569–580.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research: The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*] (pp. 33–49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1–2), 101–118.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547–567.

Radford, L. (2018a). On theories in mathematics education and their conceptual differences. In B. Sirakov, P. de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 4, pp. 4055–4074). Singapore: World Scientific Publishing Co.

Radford, L. (2018b). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61–80.

Radford, L. (2018c). Saber, aprendizaje y subjetivación en la teoría de la objetivación. In I. Abreu Mendes (Ed.), *Anais do 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 5º SIPEMAT* (pp. 1–22). Belém, Brazil: SIPEMAT.

Radford, L. (2018d). Lenguaje, política y alteridad. In C. Noronha & T. Barbosa (Eds.), *Leituras e escritas: Olhares plurais para múltiplas cenas educativas* (pp. 17–42). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Radford, L. (2019a). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 69–87.

Radford, L. (2019b). L'éthnomathématique et la mise en question d'une mathématique occidentale universelle. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2018, Paris, 22–26 octobre 2018* (pp. 902–910). Paris: Editions de l'IREM de Paris.

Radford, L. (2020). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações* *para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15–42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

Radford, L., & Lasprilla Herrera, A. (En prensa). La ética en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Investigación y Desarrollo en Educación Matemática*.

Richard, J. (1908). Sur la nature des axiomes de la géométrie. *L'Enseignement Mathématique*, *10*, 60–65.

Ricoeur, P. (1990). *Soi-même comme un autre*. Paris: Éditions du Seuil.

Roth, M.-W. (2018). Birth of signs: A (Spinozist-Marxian) materialist approach. In N. Presmeg, L. Radford, M.-W. Roth, & G. Kadunz (Eds.), *Signs of Signification* (pp. 37–53). Cham, Switzerland: Springer.

Spinoza, B. (1989). *Ethics: Including the improvement of the understanding*. (R. H. M. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus.

Vološinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1987). *The collected works of L. S. Vygotsky, Vol. 1: Problems of general psychology* (R. W. Rieber, A. S. Carton, Eds.). New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S. (1997a). *Educational psychology*. Boca Raton, FL: St. Lucie Press.

Vygotsky, L. S. (1997b). *Collected works of L. S. Vygotsky, Vol. 3: Problems of the theory and history of psychology.* (R. W. Rieber, J. Wollock, Eds.). New York: Plenum Press.

RECENSIONI E PREFAZIONI

Toffalori, C. (2019). *L'equazione degli alef*. Bologna: il Mulino. Recensione di Bruno D'Amore

Carlo Toffalori è un logico matematico molto stimato in Italia e nel mondo, ex presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA), ordinario di Logica matematica a Camerino. Ma è noto anche al vasto pubblico dei non specialisti a causa del suo interesse e del suo impegno nella divulgazione della Matematica e in primo luogo della Logica. Fautore di varie iniziative in questo senso, è anche lui stesso impegnato in prima persona in questa opera di alta divulgazione; alcuni suoi libri sono vere e proprie ghiottonerie per gli appassionati non specialisti della logica.

Ovviamente, citare gli alef in una collana che si chiama "Formule per leggere il mondo" non è che un modo per richiamare lo straordinario lavoro che fece Cantor in questo campo. Si tratta della creazione di una nuova categoria di numeri; partendo dal numerabile **n** (che è il cardinale dell'insieme N dei numeri naturali, dell'insieme Z degli interi, dell'insieme Q dei razionali, dell'insieme degli irrazionali algebrici) e proseguendo con **r** (che è il cardinale dell'insieme degli irrazionali trascendenti e dunque dei reali) e ammettendo che abbia senso scrivere che $2^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}$; ipotizzato poi che non ci siano insiemi di cardinalità maggiore di **n** e minore di **c** (ipotesi del continuo) e che dunque in qualche modo **c** segua **n** ($\mathbf{n} < \mathbf{c}$), si è di fronte a una nuova generazione di numeri (transfiniti) che richiedono nuove lettere per essere indicati, gli aleph, appunto. Con $\aleph_0$ indichiamo **n**, con $\aleph_1$ il suo successivo **c**, dunque $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ma, ammessa questa scrittura, si può generalizzare il tutto, anche l'ipotesi del continuo, e giungere alla formulazione $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Sembra solo una questione di simbolismi appropriati (e quanto lo sono!), ma è invece un nuovo mondo, una nuova categoria di oggetti che mette tutta la matematica in discussione, aprendo fronti di ricerca e di studio unici e di una bellezza formale elegante e ineccepibile, il famoso Paradiso che, secondo Hilbert, Cantor aveva costruito per noi. E che spiega la famosa frase di Cantor: "La matematica merita (…) il nome di libera (…) l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà".

Certo, la presentazione di tutto ciò e delle notevolissime conseguenze che ciò comporta nella logica, nell'intelligenza artificiale, nella vita di tutti i giorni, nel modo di guardare la matematica è incredibilmente ben descritta da Toffalori, con argomentazioni eleganti e acute, una sorta di narrazione e di analisi che spinge alla curiosità e che sorprende per la sua immediatezza, con un linguaggio attraente e convincente. Tante le sue citazioni, colte e profonde, sempre sul filo dell'equilibrio fra racconto, logica, formalismi e specifiche spiegazioni.

Ovviamente questa argomentazione ha comportato varie prese di posizione per quanto concerne la teoria degli insiemi e le sue varie assiomatizzazioni, tema che ha costituito per quasi un secolo un argomento di discussione in taluni momenti addirittura violenta e che ha costretto a rivedere daccapo la fondazione stessa della matematica.

L'Autore ci conduce anche attraverso questo impervio ma affascinante tema, dandoci tutte le nozioni che sono necessarie per capire il problema, teoremi e metateoremi che costituiscono l'ossatura di questa costruzione che offre un'affascinante prospettiva su quel che è oggi la logica.

Trovo affascinanti e perfino divertenti certi riferimenti a questioni concrete attuali, come il debito pubblico e lo spread.

Questo libro è destinato al più ampio pubblico possibile costituito da persone colte, anche non specialisti; ma io penso che un grande vantaggio da questa lettura ne avrebbero gli insegnanti di matematica, se grazie a questa lettura potessero trarre vantaggio culturale personale e poi, chissà, almeno con gli allievi più curiosi, potessero tentare un ingresso nel mondo misterioso degli aleph…

Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza*. Bologna: il Mulino.

Recensione di Bruno D'Amore

Il libro di Gabriele Lolli con questo titolo è una specie di calamita per chiunque ami la logica; su questo tema lo stesso Autore ha più volte scritto in precedenti pubblicazioni che hanno avuto fortuna editoriale, sia per il tema attraente e coinvolgente, sia per la maestria dell'Autore. Quel che sempre mi sorprende e mi avvince è che un libro (brevissimo) come questo, su questo tema, con questo linguaggio, può essere letto con piacere sia da uno specialista (che sempre troverà comunque qualcosa che lo sorprenderà) sia da un amante della logica non professionista (che resterà sorpreso dalle spiegazioni e dai mille riferimenti ghiotti).

La storia di questi teoremi è nota a tutti; mentre Peano e anche Hilbert, rifacendosi al "sogno" di Leibniz, dichiaravamo o speravano di aver creato sistemi logici in grado di decidere, in caso di controversie fra filosofi, chi avesse ragione, sulla base di un sistema logico semplice, formale, quasi a sorpresa, fra il 1930 e il 1931, il giovanissimo Gödel diede una mazzata a tutti, logicisti, intuizionisti, formalisti, … pubblicando quei teoremi che hanno cambiato la storia della logica (e non solo), mostrando concretamente che, in un sistema neanche tanto potente (capace di contenere almeno l'aritmetica elementare dei numeri naturali), è possibile costruire formule ben formate che, in quel sistema, non sono né dimostrabili né confutabili. Sappiamo che fu una vera sorpresa per i più, una meraviglia assoluta. Il mondo logico era allora affascinato e conquistato dagli studi sulle antinomie e molti dei logici più famosi dedicavano tutto il loro tempo a cercare di dipanare quella matassa aggrovigliata cercando di creare … antidoti, come la teoria dei tipi di Russell.

La proposta di rimedi contro le antinomie aveva almeno in parte scardinato alcune certezze e creato discussioni di estremo interesse, come il tentativo di chiarire in modo definitivo e completo che cosa dovesse intendersi per deduzione, un concetto che appariva (appare) a molti come quasi ovvio e ad altri come estremamente complesso. Lolli ci racconta la sequenza esatta degli eventi che costituirono la storia di quella bomba, la formulazione esatta del teorema e alcune successive modifiche effettuare dallo stesso Gödel e da altri logici, per esempio quella di Barkley Rosser che riduceva alcune richieste della tesi originale.

Naturalmente, come quasi sempre avviene in matematica, v'erano stati precedenti al teorema di Gödel e Lolli ce li racconta con molta profondità nel capitolo III, discutendo in dettagli l'accettabilità o meno di questi precedenti come tali. Nessuno di essi raggiunse la forza enunciativa e dimostrativa di Gödel e dunque nulla faceva davvero presagire questo evento. In tal senso, sono di estremo interesse le lettere che Emil Post ha inviato a Gödel, alcuni anni dopo la pubblicazione dei suoi teoremi.

Né si deve supporre che il risultato di Gödel e soprattutto la sua dimostrazione siano passati indenni rispetto all'analisi dei contemporanei; più d'uno ha tentato di contrastare e di invalidare questi formidabili teoremi. Ernst Zermelo, per esempio, fra i più noti. Ma molti altri matematici di primo piano intervennero, von Neumann, Russell, Wittgenstein, Popper e vari altri filosofi della scienza, non sempre ben consapevoli della portata dei teoremi di Gödel. Trovo molto interessanti le notizie che Lolli narra a proposito delle diverse reazioni dei matematici non logici a proposito dei risultati di Gödel, che sono le più diverse. Molto ho appreso da questo libro quando narra delle reazioni dei fisici, in primis Stephen Hawking. Molto interessante l'incursione che Lolli fa nel campo dell'arte figurativa, campo nel quale anch'io spesso mi lancio in quanto lo trovo per molti versi paragonabile, in quanto a temi, processi e interessi, a quello della matematica; qui, Lolli cita i giganti Magritte, Escher e Pistoletto, assai a proposito. Molto interessanti le considerazioni che, grazie ai suoi risultati, Gödel fa sulla matematica prima e sull'intelligenza artificiale poi, e che Lolli commenta con la solita indubbia profondità. Trovo affascinante l'ultimo capitolo dal titolo *Bellezza e magia*, nel quale si discute circa la bellezza della formula ideata da Gödel, ovviamente non in maniera frivola, ma basandosi su illustri citazioni di matematici che hanno parlato del tema assai controverso e delicato, la bellezza della matematica, tema che ha affascinato generazioni intere di matematici e che, anche se non sempre in modo esplicito, appare in modo molto presente nelle dichiarazioni di molti matematici anche contemporanei.

Credo che un simile testo dovrebbe essere letto da tutti coloro che, almeno una volta nella vita, hanno anche solo sentito citare il teorema di Gödel, anche se mai hanno dedicato tempo a leggerne l'enunciato o la dimostrazione, in una delle sue molte versioni (ricordo che esistono libri interi su questo tema, tentativi di rendere comprensibile ai non logici tale dimostrazione). Gli insegnanti di matematica, per esempio, per aumentare la capacità critica individuale della comprensione disciplinare, capire i limiti e i grandi traguardi della disciplina che insegnano, riconoscerne aspetti che altrimenti potrebbero essere basati su intuizioni poco fondate. Una lettura come questa amplia la mente, aumenta la capacità critica, dà ragione di temi affascinati e delicati che, altrimenti, se ignorati, possono banalizzare la nostra disciplina.

Maierù, L., & Florio, E. (2018). *Le costruzioni geometriche: Un percorso storico-didattico tra i matematici arabi dei secc. IX-XIII. Parte prima*. Roma: Aracne

Recensione di Bruno D'Amore

Luigi Maierù ed Emilia Florio sono due ben noti storici della matematica che da sempre pubblicano testi di estremo interesse sia per chi è appassionato di storia della matematica, sia per chi si occupa di didattica della matematica. Il fatto è che sempre più i didatti, ma anche i docenti delle scuole, specie secondarie, si sono convinti a usare eventi storici e personaggi della storia per raccontare non solo i risultati originali della ricerca matematica, ma anche la loro evoluzione e per presentare i protagonisti di questa grande avventura. Il fatto è che talvolta ci si dimentica che stiamo parlando di esseri umani e non di nomi vuoti, spesso decontestualizzati sia dal tempo sia dallo spazio, esseri umani che talvolta non si sanno collocare nell'evoluzione temporale, né nei luoghi.

Ora, che le vicende degli studi arabi su questioni di geometria così avvincenti fossero densi di significati e risultati eleganti e preziosi, è ben noto a tutti; ma, onestamente, questa dovizia di particolari e di eccellenza sorprende.

In questo bel libro, molto ben scritto e riccamente documentato, si incontrano personaggi assai noti anche al vasto pubblico, come Al-Khwārizmī e Na'īm ibn Mūsā, ma anche altri che (almeno a me) erano meno noti; ma ora, grazie a Luigi e a Emilia, sono felice di aver fatto la loro conoscenza.

Certo, il tema delle costruzioni geometriche, così caro alla Grecia classica, viene ripreso con ricchezza di mezzi e di particolari a dir poco stupendi, con perizia e creatività, sia fini a sé stessi, sia come strumento algebrico, per esempio per risolvere le equazioni di II grado, come fa per esempio Al-Khwārizmī (ma anche molti altri). D'altra parte, l'uso delle costruzioni geometriche per affrontare problemi di carattere algebrico è molto diffuso, com'è ben noto, e lo sarà ancora anche nelle successive tradizioni in tutta l'Europa mediterranea, Italia compresa.

A volte la costruzione geometrica ha il senso di una dimostrazione, come nel caso dell'enunciato-problema: "L'area di un poligono circoscritto a un cerchio è uguale al prodotto del raggio del cerchio per il semiperimetro del poligono". A volte sono strumenti per la ricerca, come nel caso della seguente sfida: "Trovare due grandezze tra due grandezze date in modo che le quattro grandezze si succedano secondo un medesimo rapporto".

Trovo fantastici alcuni problemi posti sulla parabola (più in generale sulle coniche); per un moderno, l'idea di dover rinunciare alla geometria analitica (ancora ben lungi dall'essere anche solo immaginata) sembra una folle eresia; ma siamo di fronte a metodi e ad astuzie che hanno dell'incredibile.

Molto interessanti le costruzioni di poligoni regolari e la risoluzione di problemi di geometria tridimensionale; in entrambi l'immaginazione messa in campo da questi matematici colpisce un moderno.

Certo, a questi grandi creatori non mancavano preziosi testi di ispirazione geometrica, come molti famosi dei matematici greci; ma questi matematici arabi non sono da meno, sanno dominare una geometria potente e preziosa, sanno inventare, creare.

Una cosa che mi ha colpito molto è stato lo studio sugli specchi ustori di Ibn Sahl, dato che, nei primi anni '80, mi dedicai allo studio dello stesso tema così com'è affrontato da Bonaventura Cavalieri, alcuni secoli dopo. Anche in questo caso, il riferimento alla leggenda archimedea è solo una scusa per uno studio dettagliato delle proprietà delle coniche.

Tutti i problemi della Ellade classica sono presenti, anche la trisezione dell'angolo generico negli scritti di Al-Qūhī.

Che strumento didattico potrebbe costituire questo libro (e, in genere, questo genere di libri) nelle mani di un docente di scuola secondaria di II grado? Una fonte di ispirazione, forse capace di aumentare l'interesse e la curiosità degli studenti.

Ora, però, gli Autori e il lettore si chiederanno: ma come mai D'Amore, che recensisce sempre tutto al volo (questa è la mia 965ª recensione pubblicata), ci ha messo due anni a recensire questo libro?

Scherzo delle poste; sembra che questo volume mi sia stato inviato appena uscito, nel mese di marzo del 2018, essendo io membro del comitato scientifico della collana "Matematiche Complementari – Fondamenti, storia e didattica della Matematica" della casa editrice Aracne. Che razza di percorso postale abbia compiuto il plico non mi sarà mai dato di sapere; fatto sta che mi è pervenuto solo nel mese di ottobre del 2019 … Io l'ho subito letto e recensito, dicembre 2019. Ma poi si è dovuto attendere la pubblicazione della rivista cui la mia recensione è stata inviata, aprile 2020, insomma davvero due anni dopo la pubblicazione.

Nella storia della matematica le lungaggini postali sono ben note, bastì pensare alla celebre lettera di Archimede ad Eratostene; e alla più famosa lettera (fra le tante) di Cantor a Dedekind (ma qui, come è ben noto, sto scherzando!).

Per cui, chiedo scusa al lettore, agli Autori e all'editore, ma non potevo essere più celere. Speriamo nel futuro.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia, Vol. III: Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Prefazione di Luigi Pepe. Bari: Dedalo.

Recensione di Paolo Negrini

Nel terzo volume dell'opera *La matematica e la sua storia*, gli Autori Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli narrano gli sviluppi di questa disciplina dal Rinascimento al XVIII secolo. Si tratta di un periodo storico straordinariamente fecondo per la matematica; nella premessa introduttiva leggiamo che "Nel XVIII secolo (…) ci sono stati più risultati matematici che non nell'insieme di tutti i secoli precedenti". Gli argomenti di cui parlare sono dunque innumerevoli, di natura estremamente varia, niente affatto semplici da sintetizzare. Non si può raccontare la matematica in modo superficiale: anche se non ci si rivolge a un pubblico di specialisti occorre approfondire i temi trattati, per comprenderne la sostanza. Gli Autori, esperti ricercatori in didattica della matematica, raggiungono brillantemente l'obiettivo di offrire un'esposizione adatta a una platea molto ampia, ma avvincente anche per un lettore competente. I diversi capitoli alternano il dettagliato racconto dei progressi scientifici nelle varie branche della matematica a episodi significativi nella vita degli artefici delle diverse teorie; la lettura è piacevole e coinvolgente: quasi come in un romanzo giallo, terminato un capitolo si desidera proseguire, per sapere come si sviluppa la vicenda.

Nel periodo storico analizzato, la matematica interagisce sempre più profondamente con altre branche del sapere, non soltanto scientifico. I primi tre capitoli, dedicati al Rinascimento, raccontano fra l'altro la celebre disputa fra Tartaglia, Cardano e Ferrari riguardo alla risoluzione delle equazioni cubiche, oggetto di approfondita ricerca, non più soltanto strumenti per risolvere problemi concreti; e poi la prospettiva, finalmente studiata in base a precise regole geometriche. Due nomi emergono su tutti: Leon Battista Alberti e Piero della Francesca. Costoro, noti al grande pubblico per altri meriti: formidabile architetto il primo, magnifico pittore il secondo, forniscono anche un contributo fondamentale al progresso della matematica.

Il quarto capitolo riprende l'argomento della prospettiva descrivendo nascita e sviluppo della geometria proiettiva, una scienza la cui eleganza giustifica qualunque sforzo per il suo studio. Il capitolo citato ne illustra quanto basta per farci comprendere il suo fascino e indurci ad approfondire.

Una grande conquista per la matematica è l'introduzione di un conveniente simbolismo algebrico. François Viète e René Descartes sono i principali artefici di questa vera rivoluzione, che dà un impulso formidabile al progresso dell'algebra. Se ne parla nel capitolo 3, dove è pure ricordata un'altra straordinaria creazione, il cui merito va principalmente a Descartes: la geometria analitica.

I capitoli 5 e 6 trattano principalmente i secoli XVII e XVIII, i più ricchi di nuove scoperte e creazioni, come dicevamo sopra. Alcune stelle brillano più intensamente: Euler, Leibniz, Newton; ma non è da sottovalutare l'opera di altri valenti matematici i quali, pur senza raggiungere lo stesso livello di genio, contribuiscono efficacemente al progresso della matematica offrendo spunti che i tre grandi riescono mirabilmente a sviluppare, oppure elaborando e mettendo a punto le idee di questi ultimi.

Euler, "principe dei matematici", si cimenta in diverse direzioni. È noto anche ai meno esperti come creatore della teoria dei grafi, ispirata da un problema alquanto futile riguardo a certe passeggiate nella città di Königsberg e lungo i ponti che in questa città attraversavano il fiume Pregel, e per la relazione tra il numero di vertici, spigoli e facce di un poliedro; ma sono fondamentali i suoi contributi allo studio e alle applicazioni delle funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

Lo studio dei logaritmi e delle loro proprietà aveva avuto grande impulso nei secoli XVI e XVII per merito di diversi matematici, tra i quali John Napier, latinizzato Nepero. Egli fu tra i primi a compilare dettagliate "tavole di logaritmi". Lo scopo iniziale era fornire uno strumento per facilitare l'esecuzione di operazioni altrimenti molto laboriose; in effetti le tavole di logaritmi sono state utilizzate come ausilio al calcolo fino agli anni '70 del XX secolo, rese obsolete soltanto dalla diffusione delle calcolatrici tascabili.

Nell'ultima parte del secolo XVII prende forma una delle più straordinarie creazioni della matematica: il calcolo infinitesimale, ossia l'analisi matematica. Gottfried Wilhelm von Leibniz e Isaac Newton, quasi contemporaneamente e indipendentemente l'uno dall'altro, portano a compimento le idee di Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, Pietro Mengoli e altri, realizzando uno degli strumenti più potenti per lo studio di molteplici problemi. Leibniz pone l'accento sulla ricerca di minimi e massimi; a questi è infatti dedicato il titolo del fondamentale lavoro in cui egli espone la nuova teoria. Newton, fisico, rivolge maggiore attenzione alle applicazioni riguardanti lo studio dei moti. Il capitolo 6 è dedicato alle opere di questi due geni, ma è anche ricordato il lavoro di altri valenti matematici; tra questi il marchese de l'Hôpital, ben noto a tutti gli studenti. In realtà, molti dei meriti scientifici del marchese andrebbero condivisi con Johann Bernoulli, che collaborò in modo essenziale alla stesura delle sue opere.

Il settimo e ultimo capitolo è dedicato alle “macchine da calcolo”. Il racconto si estende opportunamente a un periodo storico assai più ampio di quello annunciato nel titolo del libro: sono macchine da calcolo le tavole con sassolini (*calculi*, da cui il verbo *calcolare*) già in uso nell’antichità; poi gli abachi medioevali, strumenti che, con poche modifiche, sono tuttora utilizzati, per esempio in Giappone e in alcuni paesi dell’Europa orientale, e ancora i “bastoncini” di Napier, fino alle macchine meccaniche per il calcolo di Pascal e di Leibniz. Le calcolatrici meccaniche o elettromeccaniche della prima parte del XX secolo non aggiungono granché alla potenza di questi strumenti, fino all’avvento dell’elettronica.

Il capitolo, corredato da numerose e affascinanti illustrazioni, si chiude con un accenno alla rivoluzione del calcolo elettronico, al genio di Alan Turing e John Von Neumann, senza approfondire ma dando le notizie essenziali.

Con un po’ di spiritosa malizia gli Autori si congedano, consapevoli di averci offerto un’opera gradevole e istruttiva, e di averci infuso il desiderio di proseguire la lettura appena avranno completato il prossimo volume, il IV, ultimo della corposa tetralogia, al quale stanno già lavorando da tempo.

Fandiño Pinilla, M. I., & D’Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni: Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora.

Recensione di Laura Branchetti

Il libro costituisce un’importante risorsa per insegnanti e ricercatori nell’ambito didattico. Nel volume gli Autori riorganizzano, sistematizzano e ampliano i risultati di alcune ricerche realizzate all’inizio degli anni duemila, già pubblicate in un volume del 2006, ora riviste e arricchite di nuove riflessioni. I contenuti matematici oggetto della ricerca sono semplici all’apparenza e costituiscono temi essenziali dell’insegnamento della matematica nella scuola primaria, con innumerevoli applicazioni e sviluppi nei percorsi scolastici successivi, fino all’università: l’area e il perimetro. Può sorprendere che temi come questi siano al centro di un intero volume e che a ricerche didattiche su questi temi di base siano state dedicate così tante risorse ed energie: cosa c’è da indagare da un punto di vista didattico su argomenti così semplici? Eppure, di fronte ai risultati di tali ricerche, presentati in modo meticoloso e dettagliato sia dal punto di vista teorico che empirico, si è costretti a cambiare idea. Non solo sul tema specifico, ma sulla complessità dell’apprendimento della matematica in generale, e sulla necessità di una ricerca didattica e una formazione che, in maniera decisa, porti i docenti a riflettere a fondo sul sapere matematico di base e sulle criticità che da sempre accompagnano l’insegnamento di questa disciplina.

L’impatto del sapere e delle convinzioni degli insegnanti sui processi di apprendimento dei loro studenti è infatti notevole, per ovvie ragioni, ed è stato documentato in numerose ricerche condotte anche dagli Autori stessi. Questa assunzione è fondamentale nella lettura del testo, che identifica nella variabile “insegnante” la fonte principale delle difficoltà di apprendimento degli studenti relative a queste tematiche: numerosi ostacoli didattici, dovuti a un sapere che non supera di tanto l’oggetto dell’insegnamento stesso, si aggiungono infatti agli ostacoli epistemologici che caratterizzano area e perimetro, che contribuiscono a loro volta a minare e rendere fragile e incerto il sapere dei docenti.

Prima ancora di ragionare sulle difficoltà, nel libro vengono discusse alcune abitudini dell’insegnamento della geometria attraverso i libri di testo e vengono riesaminati i contenuti matematici, come si suol dire, “da un punto di vista superiore”, riproposti dagli Autori in maniera precisa ma anche accattivante e originale, con l’aiuto della riflessione storica sull’origine e lo sviluppo di questi saperi. In seguito gli Autori guidano i lettori, con riflessioni ed esempi presi dalla letteratura nazionali e internazionale, alla scoperta dei fattori che possono stare alla base delle difficoltà degli studenti e dei futuri insegnanti; difficoltà che, secondo gli Autori, sembrano essere addirittura in forte aumento negli ultimi anni, a tutti i livelli di istruzione.

Andando a indagare con pazienza, curiosità e competenza le convinzioni e le immagini mentali che si formano spontaneamente su area e perimetro nei processi di apprendimento, al di là di ciò che è oggetto di insegnamento esplicito, e che rimangono parte del bagaglio di molti docenti, gli Autori ci mostrano concezioni spontanee e inattesi collegamenti tra le due nozioni, che emergono in situazioni che si discostano, seppur di poco, da quelle “da libro di testo”. La prospettiva e gli strumenti teorici della ricerca didattica aiutano a identificare e comprendere le difficoltà e prospettare soluzioni, e a interpretare associazioni apparentemente insensate e inspiegabili tra i due concetti dal punto di vista della matematica, intesa come rigoroso corpus di conoscenze storicizzate e formalizzate, che assumono invece senso cambiando il punto di vista sulla pratica d’aula e analizzando i processi di costruzione della conoscenza.

Tra i risultati più interessanti delle ricerche condotte dagli Autori si trovano, ad esempio, alcune relazioni tra area e perimetro che vengono interiorizzate dagli studenti in casi particolari e generalizzate spontaneamente e inconsapevolmente, diventando proprietà che caratterizzano i due concetti e finiscono per diventare i veri criteri usati dagli studenti per rispondere alle domande nei quesiti di matematica o nella risoluzione di problemi.

Per quanto la scuola dell’infanzia e la scuola primaria siano maggiormente, e più direttamente, coinvolte da questa riflessione, le concezioni e i modelli intuitivi emersi dalla ricerca degli Autori possono rimanere immutati anche in studenti di scuola secondaria di primo e secondo grado, fungendo da modelli parassiti che ostacolano l'apprendimento di altri concetti o influenzano gli studenti nei processi di risoluzione di problemi. Anche se ai docenti sembra che gli studenti dimentichino continuamente e con grande facilità e superficialità quanto sembravano aver appreso anche solo poche settimane prima, ci sono apprendimenti molto profondi, spesso difficili da far emergere, che lasciano traccia quasi indelebile nella mente degli studenti e modelli intuitivi che continuano ad "agire" ed essere riattivati anche molti anni dopo la loro formazione. Per tale ragione è molto importante che anche i docenti di scuola secondaria siano al corrente dei risultati di tali ricerche; è infatti su questi saperi di base che dovranno far costruire ai loro studenti nuovo sapere e nuova competenza matematica. I modelli intuitivi che si sono rafforzati nel corso degli anni continueranno a ripresentarsi rendendo difficile da parte dei docenti un intervento "correttivo", soprattutto se il docente non è al corrente della natura di tali concetti e delle convinzioni degli studenti, quasi mai esplicitate.

Gli studenti di oggi sono gli adulti di domani, e tra loro, naturalmente, troviamo, senza sapere chi saranno, i futuri insegnanti di matematica, di ogni ordine e grado. Senza una riflessione mirata, chi non ha avuto occasione di mettere a fuoco nel suo percorso scolastico alcune complessità dei concetti di area e perimetro, si ritroverà nel suo lavoro di docente a confrontarsi con esse nel momento più critico, cioè quello in cui esse si manifestano in alcune domande inattese degli studenti, o nella risoluzione di un problema diverso da quelli più standard. Richiamando le parole degli Autori:

> Per esempio, decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura, supera le competenze di molti studenti, soprattutto perché, come abbiamo verificato, supera quelle di parecchi insegnanti; se poi questa figura fa parte di una successione di figure in trasformazione, allora la competenza quasi si annulla… (p. 12)

Come sottolineano gli Autori, le ricerche presentate offrono spunti notevoli soprattutto per la formazione degli insegnanti, grazie a riflessioni dei docenti stessi e a resoconti dettagliati delle attività di formazione. Per tale ragione questo volume costituisce una risorsa importante anche per i ricercatori che si occupano di formazione degli insegnanti, oltre che per i docenti stessi, che possono ripensare al loro sapere e riflettere sulle loro concezioni, a partire dalle riflessioni di altri docenti.

Gli Autori riescono a rivolgersi a un pubblico molto eterogeneo, con la loro consueta capacità di coinvolgere ed essere al tempo stesso meticolosi e precisi. La lettura di questo testo è in grado sia di stimolare riflessioni generali sull'apprendimento, che possono incontrare i gusti di un vasto pubblico, sia fornire strumenti operativi utili per la professione docente e per i formatori.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica: Il punto di vista della didattica*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Agnese Del Zozzo

Questo volume fornisce gli strumenti necessari a orientarsi nel mondo delle specificità che si incontrano nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Ricordo con affetto di averlo accolto come guida nel mio percorso di studi, fin dalla pubblicazione di una sua prima versione, nel 2008. Ma questa nuova versione del 2019 è assai più ampia e più estesa.

Il lettore che parte alla scoperta del meraviglioso mondo della didattica della matematica troverà in questo libro una mappa, in cui sono tracciati percorsi e pericoli, e una luce per districarsi nelle dinamiche d'aula e rivelarne le delicatezze.

L'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica* può essere ingenuamente o frettolosamente interpretata solo come la difficoltà di qualcuno (il tal allievo) in qualcosa (le frazioni). Gli Autori conducono invece un'analisi della questione dal punto di vista didattico più generale e scientifico, e sfruttano i risultati della ricerca degli ultimi decenni per svelare quanto la suddetta interpretazione sia illusoria.

Innanzitutto, l'apprendimento, nel caso della matematica, ha delle specificità delle quali è necessario tenere conto. Nel testo si fa continuo riferimento ad esse e riguardano sia la natura degli oggetti matematici che il processo di insegnamento-apprendimento in sé. Inoltre, come esplicitamente analizzato nell'ultimo capitolo, le dinamiche d'aula si caratterizzano per le relazioni interpersonali che ivi si instaurano. Questo significa che sarà necessario considerare opportunamente tutte le declinazioni e le sfumature di tali relazioni e dei modi in cui esse possono influenzare il processo di insegnamento-apprendimento.

Gli Autori ci rivelano un mondo dove gli "errori" e i "fallimenti" sono in realtà dei comportamenti messi in atto sempre per una ragione e che come tali dovrebbero essere trattati in modo costruttivo, come manifestazione di qualcosa che avviene e non di qualcosa che manca. Un avvertimento e non solo una manchevolezza. Il segnale di un malessere cognitivo, come dicono gli Autori.

Siamo di fronte a un cambio di prospettiva di incredibile potenza. L'attenzione – e l'intenzione – si sposta dal voler colmare ciò che (l'insegnante) identifica come le conoscenze mancanti, al voler individuare e caratterizzare, anche in termini di conoscenza, ciò che sta accadendo all'allievo (e in aula). La forza motrice di tale spostamento è la capacità di mettersi in discussione – processo tutt'altro che facile e spontaneo. Gli innumerevoli esempi concreti che gli Autori presentano e commentano, accompagnano il lettore nel passaggio dall'uno all'altro punto di vista. È un cambio di prospettiva che può ispirare, tanto da far rendere conto di non poter – e non voler – più tornare indietro; se non per rileggere daccapo il libro.

Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica riesce a dare voce ad aspetti cruciali per il processo di insegnamento-apprendimento della matematica e trasmette un grande senso di umiltà e di rispetto per la complessità del tema trattato e per le persone coinvolte. Si prova rispetto per l'allievo che in un percorso di apprendimento significativo dovrà mettersi in gioco, assumersi responsabilità, acquisire consapevolezza, vivere conflitti cognitivi, esternare, difendere e mettere in discussione le proprie idee. Si prova rispetto per l'insegnante che, nell'esercitare la sua difficile e delicata professione, dovrà coraggiosamente essere pronto a mettersi in discussione in ogni istante con l'intelligenza e la professionalità che gli sono proprie. Si prova rispetto per la matematica, dietro la quale ci sono secoli di storia e i contributi di centinaia di persone che – ciascuna nel proprio contesto storico-culturale – con grande coraggio, e a volte anche con grande fatica, hanno portato avanti le proprie idee. Si prova rispetto per il ricercatore in didattica della matematica che, in questa dimensione così complessa, cerca di delineare con rigore scientifico i contorni del processo di insegnamento-apprendimento accogliendone e mostrandone tutta la complessità.

Per comprendere dunque il senso dell'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica*, il volume ci mostra come ciascuno di tali elementi vada considerato opportunamente in tutte le sue declinazioni e, sin dai primi paragrafi, ciò viene fatto con cura, dedizione, profondità e ricchezza di esempi.

Gli Autori, nella premessa, si rivolgono al lettore-insegnante per il quale, di certo, il libro è uno strumento di crescita personale e professionale perché vi troverà informazioni e riferimenti essenziali per accogliere adeguatamente la complessità del tema trattato. Tuttavia, consiglio questo testo anche a molte altre categorie di lettori: il ricercatore in didattica della matematica, lo psicologo che si occupa di processi di apprendimento, l'educatore, l'editore, il politico, il genitore. In generale, consiglierei la lettura di questo libro a chiunque nell'ambito della noosfera voglia ampliare il proprio punto di vista accogliendo una visione olistica di ciò che riguarda l'insegnamento-apprendimento in matematica.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. (2019). *Zero*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Giovanni Giuseppe Nicosia

Zero, forse il più misterioso dei numeri, riveste un interesse speciale in molti ambiti. Senza dubbio è un oggetto matematicamente interessante ed è uno dei pilastri della cultura matematica internazionale, che lo sfrutta pesantemente nella scrittura di numeri in notazione posizionale. Quest'ultima è stata probabilmente uno dei fattori del progresso delle scienze, consentendo notazioni comode e algoritmi di grande efficacia. Parimenti cruciale è il suo ruolo nella storia della matematica, costituendo un percorso interculturale che riunisce quasi tutto il mondo.

E che dire delle difficoltà causate dallo zero nella didattica?

Gli Autori di questo libro, tra i maggiori esperti di ognuno dei campi citati, seguono il filo offerto dallo zero per un viaggio che li attraversa, mostrandocene le fondamenta.

In questo percorso trovano posto anche alcuni temi che sono in realtà, per moltissimi, dei dubbi dimenticati dall'infanzia: perché $a^0 = 1$? Perché non si può nemmeno scrivere sensatamente $a/0$? Perché la moltiplicazione di due interi negativi dà un intero positivo? Spesso è solo una coltre di abitudine e di rimozione a non farcene più stupire, anche quando, insegnanti, incontriamo la viva curiosità dei giovani allievi. Ecco che in questo libro l'insegnante trova strumenti necessari ad approfondire il suo lavoro, mentre lo studioso trova rigore epistemologico e storico, e il generico lettore curioso trova mille stimoli.

Tutti possono leggerlo anche in ragione dell'estrema semplicità e linearità dei ragionamenti: quando il discorso diviene troppo complesso o richiede troppi termini tecnici, gli Autori lo abbandonano dicendo "Noi qui ci fermiamo" e indicano riferimenti bibliografici per approfondire.

Ma a dispetto di tale semplicità di forme, il libro approfondisce temi complessi. Zero, le sue proprietà in alcuni dei diversi insiemi cui appartiene, le ragioni logiche e storiche della sua presenza divengono pretesti per esaminare gli aspetti più interessanti delle strutture che tali insiemi costituiscono con le operazioni cui intuitivamente ci crediamo legittimati a dotarli.

Una particolare attenzione viene dedicata alla motivazione di notazioni che sono ormai familiari a tutti e che, nella loro ovvietà apparente, creano poi conflitti cognitivi ed errori. Di errori tipici e significativi si affronta una lista lunghissima. Nella pratica scolastica diffusa, purtroppo, i provvedimenti adottati contro essi si riconducono spesso alla ripetizione schematica e chiara di regole: "si fa così". In questo libro molte di queste "regole" vengono riesumate, scrollando gli strati di abitudine sotto cui li abbiamo sepolti dopo anni di pratica, rivelando la loro natura stupefacente di proposizioni matematiche o di soluzione a problemi logici e concreti.

A fornire ulteriori motivazioni per oggetti e prassi che siamo abituati a usare, concorre anche la sezione storica. Zero percorre, in modo talora implicito, gran parte della storia delle più importanti civiltà. Una rassegna ricchissima delle sue interpretazioni matematiche e filosofiche viene qui estesa anche alle parole con cui zero viene indicato, con le loro connotazioni che le ricollegano ai contesti storici e sociali, e dunque al ruolo dello zero in culture e comunità del passato e del presente. Da artificio e strumento tecnico, zero prende il suo posto cruciale tra i numeri veri e propri in un processo che talora si ripete in diversi contesti storici.

Zero è un numero critico in campo didattico, ed ecco che gli Autori forniscono qui un arsenale di strumenti teorici che ne inquadrano il ruolo nelle concettualizzazioni degli allievi. Ma si passa subito alla pratica, con l'esame di alcune registrazioni di colloqui individuali e interviste collettive a bambini di scuola dell'infanzia e primaria sullo zero.

Il capitolo conclusivo riconduce tutto il materiale precedente ai principali elementi della didattica della matematica.

Su diversi piani quest'opera costituisce una lettura estremamente significativa in special modo per gli insegnanti.

Maierù, L. (2020). *Parlare di … matematica è possibile*. Roma: Aracne.

Recensione di Bruno D'Amore

Mi trovo di fronte a un libro formidabile, la cui lettura consiglio vivamente a tutti, matematici, docenti, allievi, curiosi. Si tratta non solo di una lunga, corposa, approfondita storia della matematica, ma di una lettura dotta, piacevole, ricca di sorprese colte.

I temi trattati sono solo apparentemente classici e tradizionali, hanno sempre qualcosa in più, temi di riflessione, e non solo dettagli:

- gli *Elementi* di Euclide e la loro influenza sugli studi relativi ai fondamenti della geometria, da Platone al Novecento, con riferimenti alla problematica dell'insegnamento della geometria;
- una rivisitazione dotta e profonda, ricca di spunti critici, dell'opera di Archimede, con una precisa cronologia delle traduzioni medievali e rinascimentali di tale opera;
- un'analisi dettagliata di parte dell'opera di Apollonio e la sua influenza nel mondo arabo (particolarmente dotta e ricca di spunti eccezionali) e fino al XVIII secolo;
- una narrazione fitta di citazioni interessanti e profonde dei lavori di Diofanto, Pappo, Sereno, Eutocio, mai vista in passato così completa e documentata;
- le relazioni fra geometria e algebra, il *metodo analitico*, dedicato alle posizioni (tutte perfettamente documentate), a partire dal mondo arabo e latino fino al XVI secolo e poi Viète, Descartes e Fermat, con la storia precisa della diffusione di queste conoscenze fino al XVIII;

- un esempio concreto di quel che significa "parlare di matematica", avendo come esempio edificante la storia della costruzione dell'eptagono regolare, ricca di sorprese;
- un excursus storico sulla *mathesis universalis*, a partire da Wallis, fino alla costruzione dei numeri reali, dunque fine XIX secolo, ma con sconfinamento ai giorni nostri.

Lo scopo dichiarato dal nostro Autore è quello di mostrare che è possibile parlare di matematica, non solo raccontarla, ma farla vivere da parte di chi legge, mostrandone anche la bellezza. Non è una novità, questo scopo, dato che ricordo perfettamente un altro libro dello stesso Autore del 2017 il cui titolo è esplicito assai: *Della bellezza della matematica: Le tracce di un percorso di ricerca e di vita*.

Tutti argomenti già noti (dirà, potrebbe dire, qualcuno), già letti in altri libri di storia; sì, forse, quei nomi, quei fatti, quelle opere, quelle date sono già stati citati e trattati dallo stesso Autore e da tanti altri, storici o divulgatori. Ma questo libro è diverso, coinvolgente, dotto, pieno di citazioni precise e riferimenti storici completi, traduzioni perfette anche di testi i cui autori tutti citiamo ma sui quali, realmente, spesso sorvoliamo, senza assumerci la responsabilità di ricerche precise e documentate, fidandoci di quel che è già stato detto. Qui sono davvero presenti, citati e chiosati, a volte creando anche qualche (dotta) sorpresa. Confesso di aver letto alcune citazioni precise di autori arabi del Medioevo solo qui in maniera così esplicita e completa. E poi accostamenti arditi fra personaggi e tematiche che solo il gusto dello storico di classe, che vuole proporre una narrazione più che un saggio critico scientifico, può offrire. Il che stupisce il lettore, specie se non digiuno appunto di questi temi, di questi nomi, di questi autori, più d'un motivo di sorpresa, gradevole e ben accetta.

Appassionato come sono anch'io della narrazione matematica, delle sue sfaccettature sottili, delle relazioni interpersonali fra questi creatori matematici, della chiosa magica su relazioni sottili fra opere di autori e periodi diversi, che si richiamano non sempre in modo esplicito, ma i cui rinvii devi capire da solo, confesso che ho molto apprezzato la costruzione, l'architettura narrativa, il gusto per la sorpresa e la voglia di stupire. E confesso di aver più volte ammirato il fatto che l'Autore facesse di tutto per far capire (anche solo implicitamente) quel famoso anelito di libertà intrinseco alla matematica al quale diversi autori fanno cenno parlando della nostra disciplina, come Georg Cantor e Imre Toth.

Chi e come deve/può leggere questa narrazione?

Per esempio chi s'è trovato talvolta a dover spiegare a qualcuno (scettico) che la matematica è interessante, ha una storia appassionante, che il suo sviluppo assomiglia molto, come modalità, a quello di discipline considerate di tutt'altro genere come l'arte figurativa, per esempio; qui costui troverà esempi a non finire, più di 600 pagine di esempi. A meno che, come fece

André Weil rispondendo a una lettera della sorella Simone, non si limiti a dire: "tanto varrebbe spiegare una sinfonia a dei sordi".

Un insegnante, per esempio, che vuol convincere i suoi studenti che la creazione della matematica è una storia senza fine fatta da esseri umani, non il prodotto della natura o di un demiurgo, ma il prodotto di pensieri profondi, legati a motivi che possono avere le derivazioni più diverse.

Un altro lettore che molto apprezzerà questa lettura è chi sa già abbastanza storia della matematica e l'apprezza, ma vuol sapere, almeno su alcuni temi e alcuni personaggi, dettagli precisi, citazioni esatte, riferimenti colti, relazioni fra matematici in quanto esseri umani; troverà di certo dettagli che mai aveva avuto occasione di conoscere prima, precisi, circostanziati, profondi.

Per lo studente generico di scuola, la lettura è forse troppo impegnativa; ma molti studenti universitari di matematica dovrebbero gustare la modalità narrativa, la sottile ironia che di tanto in tanto fa capolino, lo spirito colto e raffinato dell'evoluzione, così legata al dettaglio.

Auguro a questo volume il successo più pieno.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Per una teoria delle didattiche disciplinari: Saggio per docenti e ricercatori*. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Maura Iori

Nella formazione professionale dell'insegnante di una o più discipline si fa spesso distinzione (a volte confusione) tra il contributo fornito dalla singola disciplina D oggetto di insegnamento, il contributo fornito dalla Didattica della disciplina D e quello fornito dalla Didattica Generale. La disciplina D, la Didattica di D e la Didattica Generale, come gli Autori esprimono con forza e chiarezza anche attraverso numerosi esempi, "sono necessarie alla preparazione di un docente di D, ma nessuna delle tre è sufficiente; insieme concorrono a tale preparazione". Ma che cosa distingue l'una dall'altra? La preparazione nella disciplina (pura) D, di alto livello ma equilibrata e ben calibrata, è ovviamente imprescindibile, indispensabile, assolutamente necessaria, ma non include, non determina automaticamente, non garantisce, né esplicitamente né implicitamente, la preparazione nella Didattica di D, e tantomeno nella Didattica Generale. La disciplina D, la Didattica di D e la Didattica Generale sono tre discipline scientifiche differenti, anche se l'una dà, e riceve dall'altra, importanti strumenti concettuali e operativi. Come rilevano gli Autori, mentre la Didattica Generale discende storicamente dalla Pedagogia, Antropologia, Psicologia, Sociologia e Filosofia, la Didattica di D, assai più giovane della prima, scaturisce direttamente dalla Disciplina D, dalla Storia di D e dall'Epistemologia di D. Si parla dunque di Didattica dell'Inglese, Didattica dell'Italiano, Didattica della Filosofia, Didattica della Fisica, Didattica della Matematica, Didattica della Musica … a fronte di un'unica Didattica Generale. D'altra parte, ciascuna Didattica di D ha finalità formative di natura sia disciplinare, sia interdisciplinare o transdisciplinare, finalità che superano i confini, spesso artificiosi e capziosi, tra le varie discipline.

Allora perché, come propongono gli Autori, non costruire una teoria (*generale*) delle Didattiche disciplinari che risulti indipendente sia dalle *specificità* delle singole Didattiche disciplinari, ovvero dalle singole discipline D oggetto di studio, sia dalla *generalità* della Didattica Generale (nel senso evidenziato e condiviso dagli studiosi di Didattica Generale)?

In altre parole: È possibile concepire una generalizzazione delle Didattiche disciplinari che scaturisca dalle medesime Didattiche disciplinari e che, pur non riguardando le singole discipline in senso stretto, *non* si identifichi con la Didattica Generale, ma costituisca "un ponte tra la Didattica disciplinare e la Didattica Generale"?

In particolare: È possibile concepire una *teoria* (*generale*) *della Didattica disciplinare* indipendente dalle specificità della disciplina D – prendendo come base la Didattica della Matematica, ma includendo anche le altre Didattiche disciplinari – che permetta di superare l'annosa contrapposizione tra la Didattica Generale, che si focalizza principalmente sulle caratteristiche generali della pratica educativa comune a tutte le discipline, e la Didattica della disciplina D, intesa come Epistemologia dell'apprendimento di D?

Un'annosa contrapposizione che viene qui ricostruita, analizzata in profondità, descritta e chiarita con grande maestria e precisione sul piano teorico, ma sulla base di evidenze concrete, mettendo in evidenza problemi molto dibattuti e controversi, ma centrali e fondamentali, in particolare: (1) problemi di esistenza o di legittimità (della Didattica Generale e della Didattica specifica di ogni disciplina); (2) problemi di Epistemologia (in relazione alla dibattuta presenza di uno statuto epistemologico significativo alla base della Didattica Generale e/o della Didattica disciplinare) che derivano in gran parte dall'ambiguità del termine "epistemologia", suscettibile di almeno tre significati differenti, a seconda del contesto disciplinare o didattico considerato; (3) problemi di formazione (in campo educativo e in campo disciplinare).

Numerosi sono gli esempi tratti dal mondo della ricerca internazionale in Didattica della Matematica, esempi tutti facilmente generalizzabili o trasferibili ad altre discipline, che evidenziano l'esistenza di problematiche che non dipendono dalle specificità della singola disciplina D e che non sono neppure oggetto di studio della Didattica Generale; problematiche come quelle inerenti il riconoscimento e la gestione delle diverse clausole del contratto didattico e dei loro effetti, dei conflitti cognitivi o delle misconcezioni, delle immagini o dei modelli di un concetto, delle diverse tipologie di ostacolo (ontogenetico, didattico, epistemologico) all'apprendimento. Clausole, conflitti, misconcezioni, immagini, modelli e ostacoli di diversa natura che, interpretati in ciascuna Didattica disciplinare, permettono di chiarire e gestire efficacemente, e in modo trasversale, numerosi comportamenti, pratiche attese (come "l'apprendere quel che è stato stabilito a priori come conoscenza da apprendere") o devianti (come "l'apprendere come influenzare il giudizio di chi valuta si farà"); fenomeni e situazioni che fino a pochi anni fa potevano apparire inspiegabili o di scarsa rilevanza, ma che limitano fortemente, condizionano o alterano il processo di analisi dell'aula e la sua gestione, insieme alla valutazione del processo di costruzione di conoscenze o competenze disciplinari; un processo che, come gli Autori evidenziano in modo chiaro e incontrovertibile, "non può ridursi a un test per verificare la padronanza di qualche cosa di specifico", ben precisato, circoscritto o limitato nel tempo.

L'identificazione di tali problematiche costituisce il punto di partenza per la costruzione di una teoria generale della Didattica disciplinare che permetta il superamento delle ragioni profonde sia della contrapposizione tra la Didattica Generale e la Didattica disciplinare, sia delle rappresentazioni di relazioni di forte dipendenza o di subordinazione della Didattica disciplinare dalla disciplina D e dalla Didattica Generale.

Per esempio, Cramer e Schreiber (2018) sottolineano come nel passato la Didattica disciplinare sia stata descritta ricorrendo principalmente a "modelli di intersezione" (tra la disciplina scientifica D in questione e le Scienze dell'educazione, in primo luogo), a differenza dei modelli attuali che ricorrono soprattutto a relazioni di riferimento:

> Il declino dei modelli di intersezione può anche essere un'indicazione dello stato sempre più indipendente della disciplina dalla didattica della disciplina. Tuttavia, si deve presumere che non vi sia ancora una risposta definitiva e ampiamente accettata alla domanda su come la didattica disciplinare si colleghi alle discipline vicine come le scienze dell'educazione; il semplice numero e la diversità dei modelli utilizzati per descrivere la didattica disciplinare sottolinea questo punto. (Cramer & Schreiber, 2018, pp. 157–158)

Cramer e Schreiber (2018), a sostegno della loro tesi sulla mancanza di "una risposta definitiva e ampiamente accettata alla domanda su come la didattica disciplinare si colleghi alle discipline vicine", forniscono sei rappresentazioni diverse delle relazioni tra la didattica disciplinare e le scienze dell'educazione, proposte da studiosi tedeschi nel corso degli anni, dove la Didattica Generale compare esplicitamente solo in due di esse: prima (nel 1978) come disciplina a cui la Didattica disciplinare si ispira, poi (nel 2013) come ponte tra la Didattica disciplinare e le Scienze dell'educazione.

Una risposta esauriente, articolata e puntuale, ricca di dettagli, a questa e ad altre domande, si trova in questo libro. Un libro nel quale gli Autori, con grande maestria e profondità di argomentazioni, costruiscono lo "spazio concettuale” (Agazzi, 2014) di una nuova teoria scientifica, la teoria delle Didattiche Disciplinari, in sintonia con la Didattica Generale dei pedagogisti, prendendo come base la Didattica della Matematica, ma includendo le altre Didattiche disciplinari, almeno sul piano teorico.

Un libro colto, basato su risultati di ricerche condotte in Didattica della Matematica, ma scritto in uno stile scorrevole e coinvolgente, accessibile a un pubblico ampio; un libro ricco di esempi esplicativi ed efficaci, accompagnati da numerosi spunti di riflessione critica e di approfondimento, tutti di estremo interesse e facilmente trasferibili ad altre discipline.

Un libro, o meglio, un’impresa intellettuale e, allo stesso tempo, una sfida cruciale e affascinante che nasce dalla forte necessità di colmare un vuoto teorico di ricerca e di formazione assai avvertito, non solo dai ricercatori nelle varie didattiche disciplinari.

Riferimenti bibliografici

Agazzi, E. (2014). *Scientific objectivity and its contexts*. Cham: Springer International Publishing.

Cramer, C., & Schreiber, F. (2018). Subject didactics and educational sciences: Relationships and their implications for teacher education from the viewpoint of educational sciences. *Research in Subject-matter Teaching and Learning* (*RISTAL*), 1, 150–164.

La matematica e la sua didattica, Anno 28, n. 1, 2020

ISSN 1120-9968